

Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова
Національна академія наук України

Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Слюсаренко Ганна Олександрівна

УДК 537.86: 517.954

ДИСЕРТАЦІЯ

РОЗСІЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ ДВОВИМІРНО- ПЕРІОДИЧНИМИ СТРУКТУРАМИ: РОЗРОБКА І РЕАЛІЗАЦІЯ СТРОГИХ МЕТОДІВ АНАЛІЗУ В ЧАСОВІЙ ОБЛАСТІ

01.04.03 – радіофізика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Г.О. Слюсаренко

Науковий керівник: Сіренко Юрій Костянтинович, доктор фізико-математичних наук, професор

Харків – 2017

АНОТАЦІЯ

Слюсаренко Г.О. Розсіяння електромагнітних хвиль двовимірно-періодичними структурами: розробка і реалізація строгих методів аналізу в часовій області. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.03 – «радіофізика» (104 – фізика і астрономія). – Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України, Харків, 2017.

Дисертаційна робота присвячена побудові та реалізації строгих і ефективних методів розв'язання модельних початково-крайових задач теорії двовимірно-періодичних структур – ґраток і просторово обмежених 2-D фотонних кристалів. Надані аналітичні результати, що складають теоретичний фундамент для числового розв'язання задач розсіяння електромагнітних хвиль двовимірно-періодичними структурами в часовій області. Надано математично строгі формулювання відповідних початково-крайових задач, яке містить точні поглинаючі умови.

Отримано аналітичні результати, що описують низку важливих властивостей імпульсних і монохроматичних електромагнітних хвиль, які поширюються в зонах відбиття та проходження двовимірно-періодичних ґраток. Ці результати зв'язані з математичним формулюванням і фізичним трактуванням співвідношень закону збереження енергії та співвідношень взаємності. Розвинуто метод транспортних операторів для розрахунку багат шарових періодичних структур. Отримано аналітичні результати стосовно аналізу якісних характеристик частотних спектрів двовимірно-періодичних ґраток і 2-D фотонних кристалів.

Розв'язано низку актуальних прикладних задач, які стосуються процесів формування заборонених зон в просторово обмежених 2-D фотонних кристалах, процесів накопичення енергії в їхніх резонансних порожнинах. Вивчено процеси поширення і випромінювання імпульсних і монохроматичних

хвиль в компактних фотонних кристалах, дефекти в структурі яких відіграють роль різних класичних функціональних елементів.

Наукова новизна роботи визначається наступними результатами.

1. Вперше здійснена фізично коректна постановка модельних початково-крайових задач теорії двовимірно-періодичних ґраток, яка дозволяє аналізувати випадок похилого падіння плоских хвиль.

2. Розвинуто та вперше реалізовано стосовно до початково-крайових задач для просторово обмежених 2-D фотонних кристалів метод строгого розв'язку, що базується на побудові точних поглинаючих умов.

3. Вперше отримано аналітичні зображення закону збереження енергії і співвідношення взаємності, що дозволили зробити ряд важливих висновків щодо властивостей монохроматичних електромагнітних хвиль, які поширюються в зонах відбиття і проходження двовимірно-періодичних ґраток, що збуджуються поперечно-електричними або поперечно-магнітними плоскими хвилями.

4. Розвинуто метод транспортних операторів (просторово-часовий аналог методу узагальнених матриць розсіяння), що дозволяє істотно скоротити витрачувані обчислювальні ресурси під час розрахунку багат шарових двовимірно-періодичних ґраток або ґраток на товстих підкладнях.

5. Вперше вирішено низку важливих питань спектральної теорії двовимірно-періодичних ґраток і 2-D фотонних кристалів – результат, вкрай необхідний для достовірного фізичного аналізу процесів резонансного розсіяння імпульсних і монохроматичних хвиль відповідними структурами.

6. Вперше проаналізовано коректність стандартних підходів до розв'язку спектральних задач теорії 2-D фотонних кристалів та розроблено ефективну схему їхньої аналітичної регуляризації.

7. Отримано нові фізичні результати, що дозволяють якісно і кількісно охарактеризувати процеси формування заборонених зон в просторово обмежених 2-D фотонних кристалах, процеси накопичення енергії в резонансних порожнинах таких структур, процеси поширення і

випромінювання імпульсних і монохроматичних хвиль в компактних фотонних кристалах, дефекти в структурі яких відіграють роль різних класичних функціональних елементів.

Ключові слова: просторово-часові трансформації поля, двовимірною періодична ґратка, фотонний кристал, резонансна область, метод точних поглинаючих умов, початково-крайова задача, спектральна задача, часова область.

ABSTRACT

Sliusarenko H. Electromagnetic waves scattering by two-dimensional periodic structures: development and implementation of rigorous methods of analysis in the time domain. – Qualification research work as a manuscript.

Thesis for scientific degree of candidate of science in physics and mathematics on speciality 01.04.03 – radiophysics. – O.Ya. Usykov institute for Radiophysics and Electronics NAS of Ukraine, Kharkov, 2017.

The thesis is devoted to the construction and realization of rigorous and efficient methods for solving model initial-boundary value problems of the theory of two-dimensional periodic structures such as gratings and 2-D photonic crystals. Analytical results that form the theoretical basis for numerical solution of the problems of electromagnetic wave scattering by two-dimensional periodic structures in the time domain are presented. Mathematically rigorous formulation of the corresponding initial-boundary value problems, which contain, in particular, exact absorbing conditions is given.

Analytical results that describe important properties of pulsed and monochromatic electromagnetic waves propagating in the reflection and transmission zones of two-dimensional periodic gratings have been obtained. These results are related to the mathematical formulation and physical interpretation of the energy conservation laws and the reciprocity relations. The method of transport operators for calculating multilayered periodic structures has been developed. Analytical results concerning the analysis of qualitative characteristics of frequency spectra of two-dimensional periodic gratings and 2-D photonic crystals have been obtained.

A number of topical applied problems related to the processes of formation of band gaps in 2-D photonic crystals, processes of energy accumulation in their resonant cavities have been solved. The processes of propagation and radiation of pulsed and monochromatic waves have been studied for the compact photonic crystals, whose structural defects act as classical functional elements.

Key words: two-dimensional periodic structure, photonic crystal, resonance region, method of exact absorbing conditions, initial-boundary value problem, spectral problem, time domain.

The scientific novelty of the work is determined by the following results.

1. For the first time, the physically correct formulation of the model initial-boundary value problems for the theory of two-dimensional periodic gratings that permits one to analyze the case of oblique plane wave incidence has been performed.
2. For the first time, the method of rigorous solution based on the exact absorbing conditions construction has been developed and applied for the initial-boundary value problems of 2-D photonic crystals bounded in space.
3. Analytical expressions for the energy conservation law and reciprocity relations have been obtained, that allow one to make a number of important conclusions about the properties of monochromatic electromagnetic waves propagating in the reflection and transmission zones of two-dimensional periodic structures excited by transverse-electric or transverse-magnetic plane waves.
4. The method of transport operators (the space-time analog of the method of generalized scattering matrices) has been developed, which permits one to reduce significantly the computational resources when calculating multilayered two-dimensional periodic gratings or gratings on thick substrates.
5. For the first time, the important questions of the spectral theory of two-dimensional periodic gratings and 2-D photonic crystals have been answered. It is extremely important result for reliable physical analysis of the processes of resonance scattering of pulsed and monochromatic waves by corresponding structures.
6. For the first time, the correctness of standard approaches to the solution of spectral problems of the theory of 2-D photonic crystals has been analyzed and an

effective scheme of their analytical regularization has been developed.

7. The new physical results have been obtained that allowed one to characterize qualitatively and quantitatively the processes of band gaps formation in 2-D photonic crystals bounded in space, the processes of energy accumulation in resonance cavities of these structures, the propagation and radiation of pulsed and monochromatic waves in compact photonic crystals, in which the “defects” form various classical functional elements.

СПИСОК ОСНОВНИХ ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Величко Л.Г. Двумерно-периодические решетки. Часть I. Начально-краевые задачи и точные поглощающие условия для прямоугольного канала Флоке / Л.Г. Величко, А.А. Кривчикова*, Ю.К. Сиренко // Радиофизика и электроника. – 2012. – Т. 3(17), № 2. – С. 3–10.

2. Величко Л.Г. Двумерно-периодические решетки. Часть II. Свойства нестационарных и установившихся полей в прямоугольном канале Флоке / Л.Г. Величко, А.А. Кривчикова* // Радиофизика и электроника. – 2012. – Т. 3(17), № 2. – С. 10–19.

3. Величко Л.Г. Двумерно-периодические решетки. Часть III. Элементы спектральной теории / Л.Г. Величко, А.А. Кривчикова*, Ю.К. Сиренко // Радиофизика и электроника. – 2012. – Т. 3(17), № 3. – С. 3–7.

4. Sirenko K. Analytical grounds for spectral theory of 2-D photonic crystals / K. Sirenko, Yu. Sirenko, H. Sliusarenko, N. Yashina // Telecommunications and Radio Engineering. – 2016. – Vol. 75, no. 16. – P. 1417–1433.

5. Sirenko Yu. Doubly-periodic electrodynamic structures: methods and analysis results. A review / Yu. Sirenko, H. Sliusarenko, K. Balabekov // Telecommunications and Radio Engineering. – 2016. – Vol. 75, no. 19 – P. 1705–1719.

* Кривчикова є прізвищем автора до реєстрації шлюбу.

6. Sautbekov S. Doubly-periodic photonic crystals: spectral problems analysis / S. Sautbekov, Yu. Sirenko, H. Sliusarenko // Progress In Electromagnetics Research Letters. – 2017. - Vol. 66. – P. 71–77.

7. 2-D photonic crystals: electromagnetic models of the method of exact absorbing conditions / M. Ney, K. Sirenko, Yu. Sirenko, H. Sliusarenko, N. Yashina // Telecommunications and Radio Engineering. – 2017. – Vol. 76, no. 3. – P. 185–207.

8. Kryvchikova A.A. Electrodynamic properties of nonstationary and steady-state fields in the Floquet channel of a three-dimensional periodic structure [Електронний ресурс] / A.A. Kryvchikova // Proc. of 11 Kharkiv young scientist conference on radiophysics, electronics, photonics and biophysics. – Kharkiv, 2011. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).

9. Velychko L. Elements of the spectral theory of double-periodic gratings [Електронний ресурс] / L. Velychko, A. Kryvchikova // Proc. of International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Kharkiv, 2012. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).

10. Kryvchikova A.A. Energy balance equations and reciprocity relations for two dimensionally periodic structures [Електронний ресурс] / A.A. Kryvchikova // Proc. of 6 International Conference on Ultra Wideband and Ultrashort Impulse Signals. – Sevastopol, Ukraine, 2012. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).

11. Velychko L. Analysis of photonic crystals using FDTD technique [Електронний ресурс] / L. Velychko, H. Sliusarenko // Proc. of the 7th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics. – Bordeaux, France, 2013. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).

12. Sliusarenko H.O. Two-dimensionally periodic structures: investigation, application and methods for solving problems of diffraction of electromagnetic waves [Електронний ресурс] / H.O. Sliusarenko // Proc. of International Young Scientists Forum on Applied Physics. – Dnipropetrovsk, Ukraine, 2015. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).

ЗМІСТ

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ.....	10
ВСТУП	12
РОЗДІЛ 1 ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНІ СТРУКТУРИ, ПЕРІОДИЧНІ У ДВОХ НАПРЯМКАХ: МЕТОДИ І РЕЗУЛЬТАТИ АНАЛІЗУ. ОГЛЯД	20
1.1 Загальні положення	20
1.2 Короткий огляд робіт за ґратковою тематикою	22
1.3 Короткий огляд робіт за тематикою фотонних кристалів.....	35
1.4 Проблемні питання теорії двовимірно-періодичних ґраток і 2-D фотонних кристалів	38
1.5 Висновки до розділу 1	40
РОЗДІЛ 2 ДВОВИМІРНО-ПЕРІОДИЧНІ ҐРАТКИ В ПОЛІ ІМПУЛЬСНИХ І МОНОХРОМАТИЧНИХ ХВИЛЬ	42
2.1 Основні рівняння, граничні та початкові умови	42
2.2 Часова область: початково-крайові задачі	47
2.3 Точні поглинаючі умови для прямокутного каналу Флоке.....	50
2.4 Властивості нестационарних полів у прямокутному каналі Флоке	54
2.5 Багатошарові структури. Операторний метод.....	61
2.5.1 Еволюційний базис сигналу і транспортні оператори.....	61
2.5.2 Багатошарові структури. Рівняння операційного методу	66
2.6 Властивості стаціонарних полів у прямокутному каналі Флоке	69
2.6.1 Збудження TM -хвилею	69
2.6.2 Збудження TE -хвилею.....	73
2.6.3 Загальні властивості вторинного поля ґратки	75
2.6.4 Найпростіші наслідки співвідношень взаємності та закону збереження енергії.....	78
2.7 Елементи спектральної теорії двовимірно-періодичних ґраток	80
2.7.1 Побудова канонічної функції Гріна для двовимірно-	

	9
періодичної ґратки	81
2.7.2 Точковий спектр	84
2.8 Висновки до розділу 2	89
РОЗДІЛ 3 2-D ФОТОННІ КРИСТАЛИ: МОДЕЛІ МЕТОДУ ТОЧНИХ ПОГЛИНАЮЧИХ УМОВ І ОСНОВИ СПЕКТРАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ	91
3.1 Моделі методу точних поглинаючих умов для просторово обмежених фотонних кристалів	92
3.1.1 Періодичні структури скінченної товщини	92
3.1.2 Компактні структури.....	95
3.2 Заборонені зони просторово обмежених фотонних кристалів	98
3.2.1 Кристал, обмежений за товщиною	99
3.2.2 Компактні кристали.....	102
3.3 Резонансні порожнини в компактних фотонних кристалах.....	106
3.4 Хвильовідні елементи.....	112
3.5. Радіаційні ефекти в смугах пропускання кристала	117
3.6 Аналітичні підстави для побудови спектральної теорії 2-D фотонних кристалів	119
3.6.1 Канонічна функція Гріна	121
3.6.2 Спектральна задача і функція Гріна фотонного кристала ...	124
3.6.3 Вільні коливання поля у фотонному кристалі.....	130
3.6.4 Алгоритми розв'язання спектральних задач	133
3.6.5 Регуляризація спектральних задач	138
3.7 Висновки до розділу 3	139
ВИСНОВКИ.....	142
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	145
ДОДАТОК А.....	156

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ

$g(x, y, z)$ ($g(y, z)$) та $q(x, y, z)$ ($q(y, z)$)	точки в тривимірному (двовимірному) просторі R^3 (R^2);
$\vec{E}(g, t) = \{E_x, E_y, E_z\} [B/m]$, $\vec{H}(g, t) = \{H_x, H_y, H_z\} [A/m]$	вектори напруженості електричного й магнітного полів;
$\eta_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} [Om]$	імпеданс вільного простору;
$\epsilon_0 [\Phi/m]$, $\mu_0 [\Gamma H/m]$	електрична й магнітна сталі вакууму;
$\vec{j}(g, t) [A/m^2]$	вектор густини сторонніх струмів;
$\epsilon(g) > 0$, $\mu(g) > 0$, $\sigma(g) [Cm/m] \geq 0$	відносні діелектрична і магнітна проникності, питома провідність;
$\chi_\epsilon(g, t)$, $\chi_\mu(g, t)$, $\chi_\sigma(g, t)$	електрична й магнітна сприйнятливість, сприйнятливість провідності;
$\delta(\dots)$	дельта-функція Дірака;
$\chi(\dots)$	функція Хевісайда;
$t[m]$ або $\tau[m]$;	змінна часу; скінченний інтервал часу спостереження;
$\vec{\phi}(g)$, $\vec{\psi}(g)$, $\vec{F}_{E,H}(g, t)$	функції, що описують струмові й миттєві джерела електромагнітного поля;
$Q = R^3 \setminus \overline{\text{int } S}$, $\bar{Q}$	нескінченна область аналізу у відкритих початково-крайових задачах, замикання області Q ;
$\text{int } S$, S	область, яка зайнята ідеальним провідником, і її межа;
$G(\dots)$	фундаментальний розв'язок диференційного оператора;

$J_n(\dots)$	функція Бесселя порядку n ;
$R_{pq(\dots)}^{nm(\dots)}, T_{pq(\dots)}^{nm(\dots)}$	коефіцієнти відбиття й проходження відповідно (pq – номер гармоніки, що падає, nm – номер гармоніки вторинного поля);
$R = \{g \in \mathbb{R}^3: 0 < x < l_x; 0 < y < l_y\}$	канал Флоке;
$u_{nm}^{\pm}(z, t)$	просторово-часові амплітуди імпульсних хвиль на верхній (+) і нижній (–) межах нерегулярної частини каналу Флоке R ;
$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	оператор Лапласа;
$k = 2\pi/\lambda [rad/m]$ та $\lambda [m]$	хвильове число і довжина хвилі у вільному просторі.

Всі фізичні одиниці, що використовуються в дисертації, мають розмірності системи СІ, тільки змінна часу t (це добуток істинного часу на швидкість поширення світла у вакуумі) вимірюється в метрах ($[m]$). У тексті дисертації розмірності опущені. Результати, отримані при розв'язанні модельних задач з конкретними значеннями геометричних параметрів, переносяться на будь-які інші геометрично подібні структури в такий спосіб: якщо параметру a модельної задачі відповідає параметр a_r реальної задачі та $a_r/a = \alpha$, то всі отримані при розв'язанні модельної задачі величини, що включають розмірність $[m]$, необхідно помножити на коефіцієнт подібності α , а всі величини, що включають розмірність $[m^{-1}]$, – поділити на α .

ВСТУП

Актуальність теми. Дослідження двовимірно-періодичних структур є перспективним з точок зору як фундаментальної, так і прикладної науки. Періодичні структури – найбільш затребувані дисперсійні елементи, що дозволяють вести ефективну поляризаційну, частотну й просторову селекцію сигналів. Нові знання щодо фізики відповідних хвильових і коливальних процесів, які отримано під час аналізу одновимірно-періодичних структур, знаходять втілення в принципово нових вузлах і пристроях гіга-, терагерцевого й оптичного діапазонів, в нових матеріалах з включеннями, розміри яких вимірюються в мікро- і нанометрах, в нових схемах оперативного вимірювання параметрів різних штучних і природних матеріалів і середовищ. Однак, можливості класичних скалярних моделей теорії періодичних структур, що широко використовуються, обмежені. Як в теорії, так і на практиці все частіше виникають задачі, що вимагають аналізу тривимірних векторних моделей періодичних структур.

Фундамент для ефективного розв'язання таких задач було закладено в роботах [1-3]. Так, в [1, 3] (автори Ю.К. Сіренко, S. Strom, Н.П. Яшина та ін.) були побудовані й широко апробовані нелокальні та локальні точні поглинаючі умови, що дозволяють замінювати відкриті початково-крайові задачі обчислювальної електродинаміки еквівалентними закритими задачами. Відповідні результати набули подальшого розвитку в дисертаційній роботі стосовно до векторних модельних задач теорії ґраток і теорії 2-D фотонних кристалів. У роботі [2] (автори К.Ю. Сіренко, В.Л. Пазинін, Ю.К. Сіренко і Н. Bagcı) для дослідження резонансних структур різного типу були запропоновані й реалізовані прискорені кінцево-різницеві схеми розв'язання задач із точними нелокальними поглинаючими умовами. Прискорення забезпечувалося використанням швидкого перетворення Фур'є під час обчислення згорткових інтегралів. Це значно знизило вимоги до ресурсів

комп'ютерів, що використовуються в обчислювальних експериментах. До того ж, доступними для багатьох стали і швидкі багатопроцесорні обчислювальні комплекси, зокрема, кластери комп'ютерної мережевої технології ГРІД Європейського центру ядерних досліджень.

Однак очевидно, що наявності потужної обчислювальної техніки недостатньо для успішного розв'язання навіть найпростіших векторних ґраткових задач і задач аналізу фотонних кристалів. Реалізована на комп'ютері обчислювальна схема повинна бути стійкою та збіжною, похибка розрахунку – передбачуваною, а результати розрахунків мають допускати однозначне фізичне тлумачення. Ці вимоги забезпечуються теоретичним аналізом, який проводиться на всіх етапах побудови моделі двовимірно-періодичних структур (постановка крайових і початково-крайових задач, визначення класів коректності цих задач, дослідження якісних характеристик особливостей аналітичного продовження розв'язків модельних крайових задач в область комплексних значень частотного параметра і т.д.). Від того, наскільки точно розраховуються всі електродинамічні характеристики таких структур, багато в чому залежить якість важливих, як для теорії, так і для практики, результатів, що отримуються на відповідній основі. Ряд пов'язаних з таким аналізом актуальних наукових задач, що мають важливе фундаментальне і прикладне значення, розв'язується в дисертаційній роботі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в лабораторії математичної фізики Інституту радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України (ІРЕ ім. О.Я. Усикова НАН України) та відповідає одному з напрямків наукових досліджень (електроніка та радіофізика міліметрових і субміліметрових хвиль), затверджених постановою Президіуму НАН України №30 від 11.02.2009 р. Дослідження за темою дисертації здійснювалися згідно з планом науково-дослідницьких робіт ІРЕ ім. О.Я. Усикова НАН України в межах фундаментальної держбюджетної НДР «Розробка та впровадження нових методів обчислювальної радіофізики; теоретичне та експериментальне

дослідження трансформації електромагнітних полів гіга-, терагерцевого та оптичного діапазонів в об'єктах і середовищах антропогенного та природного походження; аналіз та синтез нових вузлів і пристроїв резонансної квазіоптики, твердотільної електроніки, імпульсної та антенної техніки; розробка і тестування нових вимірювальних схем рефлекто- і діелектрометрії» (номер державної реєстрації 0112U000210, строк виконання 2012–2016 рр.) і цільової програми НАН України «Розробка нових методів і програмного комплексу ГРІД обчислень для задач радіофізики, біофізики і фізики твердого тіла» (номер державної реєстрації 0113U002581, строк виконання 2011–2013 рр.).

Мета і задачі дослідження. Мета дослідження:

- розробити і реалізувати універсальні, надійні й ефективні методи розв'язання модельних початково-крайових задач теорії двовимірних періодичних структур – ґраток і просторово обмежених 2-D фотонних кристалів;
- отримати аналітичні результати, які можуть бути основою для побудови спектральної теорії двовимірних періодичних ґраток і 2-D фотонних кристалів;
- виявити, з'ясувати умови виникнення та проаналізувати конкретні фізичні ефекти, які супроводжують процеси випромінювання, поширення та розсіювання імпульсних і монохроматичних хвиль в просторово обмежених 2-D фотонних кристалах з «дефектами» різного типу.

Для досягнення поставленої в роботі мети необхідно було вирішити такі **завдання:**

- здійснити коректну постановку модельних початково-крайових задач електродинамічної теорії двовимірних періодичних ґраток у разі «похилого падіння» на структуру хвиль, що збуджують;
- впровадити в обчислювальні схеми методу кінцевих різниць у часовій області точні поглинаючі умови, що дозволяють замінити принципово відкриті модельні задачі задачами закритими;

- отримати аналітичні результати, що описують ряд важливих властивостей імпульсних і монохроматичних електромагнітних хвиль, які поширюються в зонах відбиття і проходження двовимірно-періодичних ґраток, і на цій основі розробити, зокрема, метод транспортних операторів для швидкого розрахунку багатосарових структур;

- отримати аналітичні результати, що дозволяють перейти до аналізу якісних характеристик частотних спектрів довимірно-періодичних ґраток і 2-D фотонних кристалів;

- проаналізувати проблемні питання, пов'язані з алгоритмізацією та числовим роз'язанням спектральних задач електродинамічної теорії 2-D фотонних кристалів;

- провести проблемно-орієнтовані обчислювальні експерименти, зафіксувати й проаналізувати цікаві для теорії і практики режими розсіювання і випромінювання імпульсних і монохроматичних хвиль, що поширюються в просторово обмежених 2-D «дефектних» фотонних кристалах.

Об'єктом дослідження в даній роботі є просторово-часові та просторово-частотні трансформації електромагнітного поля в умовах можливого резонансного розсіювання хвиль.

Предметом дослідження є електромагнітні хвилі в двовимірно-періодичних структурах – в ґратках і просторово обмежених 2-D фотонних кристалах.

Методи дослідження. Для вирішення поставлених в дисертації задач використовувалися строгі аналітичні та числові методи: метод неповного розділення змінних, метод інтегральних перетворень, метод фундаментальних розв'язків диференційних операторів, метод точних поглинаючих умов, метод кінцевих різниць у часовій області. Під час підготовки та аналізу результатів обчислювальних експериментів у часовій області до уваги приймалися відомі результати частотної області.

Наукова новизна одержаних результатів.

1. Вперше здійснена фізично коректна постановка модельних початково-крайових задач теорії двовимірно-періодичних ґраток, яка дозволяє аналізувати випадок похилого падіння плоских хвиль.

2. Розвинено та вперше реалізовано стосовно до початково-крайових задач для просторово обмежених 2-D фотонних кристалів метод строгого розв'язку, що базується на побудові точних поглинаючих умов.

3. Вперше отримано аналітичні зображення закону збереження енергії і співвідношень взаємності, що дозволили зробити ряд важливих висновків щодо властивостей монохроматичних електромагнітних хвиль, які поширюються в зонах відбиття та проходження двовимірно-періодичних структур, що збуджуються поперечно-електричними або поперечно-магнітними плоскими хвилями.

4. Розвинуто метод транспортних операторів (просторово-часовий аналог методу узагальнених матриць розсіяння), що дозволяє істотно скоротити витрачувані обчислювальні ресурси під час розрахунку багат шарових двовимірно-періодичних ґраток або ґраток на товстих підкладнях.

5. Вперше вирішено низку важливих питань спектральної теорії двовимірно-періодичних ґраток і 2-D фотонних кристалів – результат, вкрай необхідний для достовірного фізичного аналізу процесів резонансного розсіяння імпульсних і монохроматичних хвиль відповідними структурами.

6. Вперше проаналізована коректність стандартних підходів до розв'язку спектральних задач теорії 2-D фотонних кристалів та розроблена ефективна схема їхньої аналітичної регуляризації.

7. Отримано нові фізичні результати, що дозволяють якісно і кількісно охарактеризувати процеси формування заборонених зон в просторово обмежених 2-D фотонних кристалах, процеси накопичення енергії в резонансних порожнинах таких структур, процеси поширення і випромінювання імпульсних і монохроматичних хвиль в компактних фотонних

кристалах, дефекти в структурі яких відіграють роль різних класичних функціональних елементів.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що вони суттєво доповнюють відомі уявлення про хвильові процеси в двовимірних періодичних структурах, які широко використовуються в техніці міліметрових і субміліметрових хвиль, електроніці та оптиці й усувають ряд проблем, які перешкоджали строгому аналізу і модельному синтезу цих та інших, більш складних, електродинамічних об'єктів. Основні результати роботи можуть бути використані під час розв'язання як наукових, так і інженерних задач радіофізики та оптики. Так, наприклад, важливим для практики результатом є продемонстрована в роботі можливість адекватного опису просторово-часових і просторово-частотних трансформацій електромагнітних хвиль, що поширюються в «дефектних» фотонних кристалах, можливість зведення цього опису до оцифрування стандартного набору загальноприйнятих характеристик. Таких, наприклад, як ті, які використовуються в класичній теорії хвилеводів або в електродинамічній теорії ґраток.

Методи аналізу просторово обмежених фотонних кристалів, що розвинені в роботі, реалізовано в пакетах прикладних програм, які орієнтовані на ефективне числове розв'язання широкого кола фундаментальних і прикладних радіофізичних задач. Ці програми забезпечені зручним інтерфейсом і допускають візуалізацію перехідних станів поля в об'єктах, що аналізуються. Це вкрай важливо для достовірного фізичного аналізу процесів, які моделюються, та дозволяє рекомендувати їх до використання під час навчання студентів, що спеціалізуються в галузі теоретичної радіофізики.

Особистий внесок здобувача. Усі основні аналітичні та фізичні результати, що надані в роботі, були отримані здобувачем особисто. Дисертантом був створений ряд сервісних програм для пакетів, орієнтованих на числовий аналіз просторово обмежених фотонних кристалів, проведені обчислювальні експерименти, проаналізовані відповідні числові результати й сформульовані подальші висновки.

Особистий внесок здобувача в роботи [4–17], в яких опубліковані результати дисертації і частина з яких написана в співавторстві, полягає в наступному. Під час підготовки робіт [4–6, 12, 14, 17], які присвячено двовимірно-періодичним ґраткам, здобувач брала участь в розробці строгого підходу до постановки й алгоритмізації початково-крайових задач, що дозволяють аналізувати, в тому числі, і випадок похилого падіння плоских хвиль. Автором були отримані всі аналітичні зображення для закону збереження енергії і співвідношень взаємності, здобувач брала участь у формулюванні основних фізичних наслідків з цих зображень і в отриманні результатів, які є основою для побудови спектральної теорії відповідних електродинамічних структур. Внесок здобувача в роботи [7, 9], які присвячено аналізу та алгоритмізації спектральних задач для 2-D фотонних кристалів, полягав у постановці відповідних задач, в якісному аналізі їхніх розв’язків, в розробці та реалізації підходу до їхньої аналітичної регуляризації. Робота [8] – оглядова, в якій автор проаналізувала велику частину літературних джерел і взяла участь в формулюванні остаточних висновків і рекомендацій. Для роботи [10] дисертант виконала всі обчислювальні експерименти, взяла участь в обговоренні їх результатів і у формулюванні основних фізичних висновків. Роботи [11, 13, 15, 16] написані здобувачем особисто.

Апробація результатів дисертації. Матеріали, що складають зміст дисертації, доповідались на наукових семінарах IPE ім. О.Я. Усикова НАН України, на IEEE International symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI National Radio science Meeting (Chicago, USA, 8–14 July, 2012). Особисто здобувачем матеріали дисертації доповідались на таких міжнародних наукових конференціях:

- 11th Kharkiv Young Scientist Conference on Radiophysics, Electronics, Photonics and Biophysics (Kharkiv, Ukraine, 28 November – 2 December, 2011);
- 6th International Conference on Ultra Wideband and Ultrashort Impulse Signals (Sevastopol, Ukraine, 17–21 September, 2012);

- International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (Kharkiv, Ukraine, 28–30 August 2012);
- 7th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics (Bordeaux, France, 16–21 September, 2013);
- International Young Scientists Forum on Applied Physics (Dnipro, Ukraine, 29 September – 2 October 2015);
- 9th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (Ukraine, Kharkiv, 20–24 June 2016).

Публікації. Матеріали дисертації своєчасно та повністю опубліковано в 14 наукових працях, з них – 7 статей у провідних фахових журналах [4–10] і 7 тез доповідей [11–17] в матеріалах міжнародних конференцій. Особисто автором опубліковано 4 роботи [11, 13, 15, 16].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів основного тексту з рисунками, висновків та списку використаних джерел. Обсяг дисертації становить 158 сторінок. Вона містить 28 рисунків (з них 2 розміщені на 2 окремих сторінках), список використаних джерел з 98 найменувань на 11 сторінках, висновки і додаток.

РОЗДІЛ 1

ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНІ СТРУКТУРИ, ПЕРІОДИЧНІ У ДВОХ НАПРЯМКАХ: МЕТОДИ І РЕЗУЛЬТАТИ АНАЛІЗУ. ОГЛЯД

1.1 Загальні положення

Періодичні структури давно й дуже широко використовуються в різних областях науки і техніки. Це унікальні за своїми можливостями елементи, що дозволяють керувати змінювати просторові, частотні й поляризаційні характеристики сигналів різної природи – акустичних та електромагнітних, імпульсних та монохроматичних. Саме з цим пов'язаний постійний, що розтягнувся вже більш ніж на двісті років, інтерес до теоретичного й експериментального вивчення періодичних структур, до пошуку нових схем їхнього використання в науковому приладобудуванні й прикладній оптиці, в антенній та прискорювальній техніці, у фотоніці й резонансній квазіоптиці, у вакуумній та твердотільній електроніці, під час створення нових штучних матеріалів з незвичайними властивостями для різних діапазонів довжин хвиль, що використовуються людиною.

У дисертаційній роботі розглядаються двовимірно-періодичні структури, тобто структури, періодичні у двох ортогональних просторових напрямках. Це звичайні дифракційні ґратки (напівпрозорі й відбивні), обмежені за товщиною, і 2-D фотонні кристали – структури, періодичні у двох просторових напрямках і нескінченні й однорідні – в третьому. Власне, результатів з дослідження таких структур в літературі не дуже багато. Але багато з того, що зроблено для одновимірно-періодичних структур – класичних дифракційних ґраток і 1-D фотонних кристалів, заслуговує самої серйозної уваги тих, хто націлений на результативний аналіз двовимірно-періодичних структур. Реалізовані в теорії одновимірно-періодичних структур ідеї і методи, виявлені й детально досліджені ефекти та явища, що пов'язані з незвичайними просторово-

часовими та просторово-частотними трансформаціями електромагнітних хвиль, є доброю основою, творчо переробивши яку, можна досить швидко просунути її у вивченні більш складних, двовимірно-періодичних структур.

Властивості об'єктів, що досліджуються в дисертації, так само як і властивості всіх без винятку періодичних структур, істотно залежать від відношення довжин їхніх періодів до довжини хвилі збудження. Величина цього параметра відіграє визначальну роль і при виборі (побудові) методів аналізу періодичних структур. Сьогодні, враховуючи величезний досвід попередніх досліджень й сучасні можливості обчислювальної техніки, можна досить впевнено говорити про те, що в найбільш цікавому для фізики і застосувань резонансному діапазоні довжин хвиль (характерні геометричні параметри і довжина хвилі порівнянні), найбільш ефективним і надійним інструментом аналізу двовимірно-періодичних структур виявляються, швидше за все, так звані «чисельно-аналітичні методи». До чисельно-аналітичних ми відносимо методи, які аналітично «регуляризують» задачу перед її числовою реалізацією, тобто методи, що гарантують отримання достовірних результатів, похибку яких можна аналітично оцінити й, за потреби, зменшити до необхідних величин.

Оскільки основні задачі дисертації зв'язані з резонансним діапазоном довжин хвиль, ми опускаємо в огляді роботи, які присвячені аналітичним методам (довгохвильові й короткохвильові наближення, наближення малих або великих геометричних параметрів), і практично не зачіпаємо роботи, в яких використовуються прямі числові методи, тобто такі методи, які базуються на стандартних підходах до дискретизації модельних крайових або початково-крайових задач (метод зшивання, метод кінцевих різниць і метод кінцевих елементів). Увага приділяється, здебільшого, оригінальним, досить строгим та ефективним підходам до аналізу періодичних структур, досягненням і проблемам в їхній електродинамічній теорії, фізичним результатам (резонансним та аномальним просторово-часовим й просторово-частотним трансформаціям електромагнітних хвиль), що становлять очевидний

практичний інтерес. Мета такої роботи з літературними джерелами полягає в обґрунтованому виборі задач і напрямів дослідження, у визначенні методів і засобів, які дозволили б досягти бажаних результатів.

І ще одне зауваження: більшу частину посилань ми намагаємося робити на узагальнюючі роботи (монографії), оскільки їхні списки використаної літератури містять, як правило, всі оригінальні роботи, що були джерелом викладених результатів.

1.2 Короткий огляд робіт за ґратковою тематикою

Досить повне уявлення про сучасний стан електродинамічної теорії одновимірно-періодичних ґраток і теорії фотонних кристалів дозволяють отримати фундаментальні роботи [1, 3, 18–30]. До появи першої з них, ґратки, відкриті в 1786 році американським астрономом D. Rittenhouse, виготовлялися, використовувалися і вивчалися, без малого, два століття. Істотний слід в історію дифракційних ґраток, ще до того, як важливість роботи з ними була усвідомлена не тільки оптиками, а й представниками інших наукових напрямків, залишили J. Fraunhofer, F.M. Schwerd, H.A. Rowland, R.W. Wood, O.M. Rayleigh, F. Bloch.

В середині 20-го століття інтерес до періодичних структур помітно зріс у зв'язку зі стрімким розвитком антенної техніки й техніки надвисоких частот. Аналітичні методи аналізу ґраток, розвинені в роботах Б.Я. Мойжеса, Л.А. Вайнштейна, В.М. Астапенко, Г.Д. Малюжинця, О.М. Сивова, В.С. Ігнатовського, E.A.N. Whitehead, F. Berz, J.F. Carlson, G.L. Baldwin, A.E. Heins і Ю.П. Лисанова, які не дозволяли в силу природних обмежень задовольнити постійно зростаючі запити практики, в 60-і роки поступаються місцем прямим числовим методам (Л.М. Дерюгін, V. Twersky, N. Amitay, V. Galindo, C.P. Wu, R. Petit, D. Maystre, A. Roger), орієнтованим на використання електронно-обчислювальної техніки. З'являються важливі для

різних застосувань фізичні результати, пов'язані з резонансним розсіянням хвиль (Л.М. Дерюгін, А. Hessel та А.А. Oliner, Б.М. Болотовський та А.М. Лебедєв, Є.О. Яковлєв та М.В. Робачевський, Е.В. Авдєєв та Г.В. Воскресенський, А.Ф. Чаплін та А.Д. Хзмалян, E.V. Jull та G.R. Ebbeson).

У 1962 році виходить робота [18], в якій ґратка вперше була розглянута як об'єкт адекватного математичного моделювання, робота, яка продемонструвала, як і що потрібно робити з початковими модельними задачами для того, щоб отримати надійні й достовірні фізичні результати в обсязі, достатньому для вирішення численних прикладних задач. В роботі [18] була розв'язана тільки одна, не дуже складна задача електродинамічної теорії ґраток (розсіяння плоскої нормально падаючої хвилі плоскою довільно заповненою ґраткою з тонких металевих стрічок), але і її вплив на розвиток цієї теорії, на побудову методів, що дозволили закрити велику частину актуальних питань, пов'язаних з фізикою процесів резонансного розсіяння хвиль одновимірною-періодичними структурами, важко переоцінити. Автори роботи – З.С. Агранович, В.О. Марченко та В.П. Шестопапов – звели в ній пару суматорних рівнянь методу зшивання до добре вивченої задачі Рімана-Гільберта про відновлення аналітичної функції за сумою її граничних значень на дузі. Розв'язок Карлемана цієї задачі було перетворено з використанням формул Сохоцького, що дають граничні значення функцій, представлених інтегралами типу Коші. Після переходу в цих значеннях до коефіцієнтів Фур'є відповідних функцій виходить еквівалентна початковій задачі нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду з компактним (ядерним) матричним оператором. Зрозуміло, що для алгоритму, орієнтованого на використання обчислювальної техніки, це чудовий результат, який можна порівняти за ефективністю з явним аналітичним розв'язком. Вже пізніше з'ясувалося, що, по суті, в роботі була оригінально і дуже красиво реалізована схема, що часто використовується у функціональному аналізі і в теорії інтегральних рівнянь для доведення теорем існування та відома під назвою «ліва регуляризація». Основні кроки цієї схеми зв'язані з виділенням та

оберненням в явному вигляді сингулярної (головної) частини операторного рівняння першого роду.

Підхід, вперше реалізований в [18] й отримавший назву «метод напівобернення», а пізніше – «метод аналітичної регуляризації», був розвинений, узагальнений і використаний для вивчення фізики процесів резонансного розсіяння хвиль одновимірно-періодичними ґратками в книгах [19–23, 25]. В першій з цих книг (автор В.П. Шестопапов) було істотно розширено коло дифракційних задач для тонких, плоских металевих стрічок і діафрагм, які ефективно розв’язуються в межах описаної вище схеми зведення до задачі Рімана-Гільберта теорії аналітичних функцій.

Монографія [20] (автори В.П. Шестопапов, Л.М. Литвиненко, С.О. Масалов та В.Г. Сологуб) не мала до моменту свого виходу в світ гідних аналогів, містила унікальний за повнотою фактичний матеріал, пов’язаний з дослідженням фізичних властивостей полів, що формуються плоскими й багат шаровими стрічковими структурами, ґратками з металевих та діелектричних брусків (прямокутних і круглих у поперечному перерізі), ґратками типу «жалюзі» та ешелет. Надані тут строгі розв’язки крайових задач електродинамічної теорії ґраток, отримані з використанням двох різних варіантів методу напівобернення, були орієнтовані, перш за все, на ефективний аналіз в резонансному хвильовому діапазоні. Але вони дозволяли переходити й до відомих довгохвильових наближень, а в обчислювальних експериментах – частково охоплювати область значень параметрів, де зазвичай користуються асимптотичними короткохвильовими наближеннями. Детально, аналітично й чисельно були розглянуті ефекти повного резонансного відбиття і проходження плоских хвиль, що реалізуються на напівпрозорих об’ємних періодичних структурах, аномалії Вуда в точках виникнення нових гармонік просторового спектру ґраток, що поширюються, явища керованої несиметрії вторинного поля, відмінності в поляризаційній сприйнятливості ґраток різного типу і т.д.

У монографії вперше були переконливо продемонстровані можливості нового варіанту методу аналітичної регуляризації, пов’язаного з аналітичним

оберненням головної частини матричних рівнянь типу згортки (матричних рівнянь методу зшивання). Цей підхід розробляли разом з авторами книги їхні колеги і учні А.О. Кириленко та В.Є. Буданов. В наступні роки теорія методу була істотно просунута в їхніх роботах і в роботах Л.А. Рудя, Н.П. Яшиної та Ю.К. Сіренка. Були побудовані розв'язки задач дифракції хвиль на ножових ґратках зі складною структурою періоду й діелектричним заповненням каналів зв'язку зон випромінювання, на ешелеті з тупими і гострими зубцями, на діелектричному ешелеті з однією металізованою гранню, на ешелеті з двома гранями, які по-різному поглинають.

Числова реалізація й фізичний аналіз задач, що розглядалися, велися, здебільшого, в резонансному діапазоні частот та на відносно малопотужних комп'ютерах. Тому всі деталі алгоритмів й обчислювальних схем, що реалізувалися, відпрацьовувалися з особливою ретельністю. Експлуатаційні характеристики методу (реальна швидкість збіжності, точність виконання всіх умов задачі і т.д.), які не можна було оцінити аналітично, оцінювалися під час обчислювальних експериментів за спеціально розробленими для цього методиками. Паралельно з програмною реалізацією алгоритмів проводилися дослідження, пов'язані з їх повним математичним обґрунтуванням, з побудовою якісної теорії некоректних нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь методу зшивання (важливо було визначитися, в яких ситуаціях їх можна було б використовувати, не піддаючи процедурі регуляризації), з формулюванням нових канонічних задач, явний аналітичний розв'язок яких міг би бути основою для створення нових варіантів методу напівобернення.

Результати всієї цієї роботи були підсумовані в монографіях [21, 23]. Перша з них (автори В.П. Шестопапов, А.О. Кириленко та С.О. Масалов) цілком присвячена методам, алгоритмам і обчислювальним схемам, що їх реалізують. В другій (автори В.П. Шестопапов, А.О. Кириленко, С.О. Масалов та Ю.К. Сіренко) були надані фізичні результати теорії розсіяння хвиль дифракційними ґратками, отримані в 1962–1985 роках. Основну увагу тут було

звернено на поглиблений аналіз різноманітних дифракційних явищ, на виявлення загальних закономірностей резонансного і нерезонансного розсіювання хвиль, на докладне дослідження окремих ситуацій, що мають основоположне значення у фундаментальному або прикладному відношенні. Частково монографія [23] перетинається за змістом із монографією [20], але рівень викладу фізичного матеріалу тут якісно інший. Йдеться вже не про окремі структури, а про класи структур, що реалізують ті чи інші режими розсіювання хвиль. Просторово-частотні трансформації полів, що становлять інтерес, набувають закінченого опису, що дозволяє досить впевнено прогнозувати можливість їх спостереження, характеристики й особливості динаміки за варіації основних параметрів. Справедливість зроблених висновків і виявлених фактів, сформульованих закономірностей була підтверджена численними прикладами з використанням періодичних ґраток різних типів і конфігурацій. Ядро книги склали результати оригінальних робіт, що виконані авторами, їхніми учнями й колегами і присвячені аналізу ефектів повного проходження та відбиття плоских хвиль на напівпрозорих структурах, вивченню порогових явищ (аномалій Вуда) і «духів» ґраток, дослідженню режимів повного недзеркального (зокрема, автоколімаційного) відбиття хвиль непрозорими структурами, аналізу і синтезу ґратчастих перетворювачів поляризації при скануванні в півплощині та півсфері, та ін. Ця книга і книги [20], [25] (автори В.П. Шестопалов та Ю.К. Сіренко) ще довго будуть найбільш повними посібниками з фізики процесів розсіювання хвиль класичними одновимірними періодичними структурами.

Математичні моделі методів аналітичної регуляризації мають незаперечні переваги, коли йдеться про глобальне дослідження фізики окремих резонансних ефектів і явищ, складання якісної картини дифракції хвиль на окремих типах дифракційних ґратках, розв'язання задач малопараметричної оптимізації, тестування алгоритмів евристичних або недостатньо обґрунтованих прямих методів. Це – переваги. Недоліки – в тому, що всі надані в [20–24] напіваналітичні методи були жорстко пов'язані з особливостями геометрії

періодичних структур, що розглядаються. Кожна з таких структур мала за будь-яких граничних значень частотного або геометричних параметрів породжувати модельну задачу, яку можна розв'язати в явному вигляді. Цей і низка інших чинників обмежували область можливого застосування розроблених напіваналітичних методів скінченним набором ґраток з досить простою геометрією. З такими методами не можна було виходити, наприклад, на розв'язок повнопараметричних обернених задач синтезу і візуалізації. Узагальнення ідеї аналітичної регуляризації, поширення її на клас нескінченнопараметричних модельних задач, не обмежений поняттям типу структури (стрічкові, ножові, з прямокутних і круглих брусів, ешелет і т.д.), затягнулося і було здійснено вже набагато пізніше. Результати, отримані в цьому напрямку В.П. Шестопаловим, А.Ю. Поєдинчуком, Ю.О. Тучкіним та Ю.І. Крутинем включені в книги [25], [26] (автори В.П. Шестопалов, Ю.О. Тучкін, А.Ю. Поєдинчук та Ю.К. Сіренко) і [3] (редактори Ю.К. Сіренко та S. Strom).

Звичайно, що в процесі побудови електродинамічної теорії ґраток крім досягнень з'являлися й проблеми, які, з тих чи інших причин, відразу зняти не виходило. Частина з цих проблем, так чи інакше, була пов'язана з питаннями щодо однозначної розв'язаності вихідних модельних крайових задач, що описують властивості ґраток, які поміщені в поле плоских хвиль або в поле хвиль зосереджених джерел. Це еліптичні задачі в некласичних областях, межі яких йдуть на нескінченність. Для виділення єдиного, фізичного розв'язку в ці задачі необхідно вводити додаткові умови й перевіряти результативність таких процедур строгим аналізом одного з класичних принципів: принципу випромінювання, принципу граничного поглинання або принципу граничної амплітуди. У випадку, коли ґратки збуджувалися плоскими хвилями, роль таких умов традиційно виконували введені ще О.М. Rayleigh умови, які сьогодні зазвичай називають «парціальними умовами випромінювання на нескінченності». Ці умови реалізуються в аналітичному зображенні поля дифракції в зонах відбиття і проходження періодичної структури, яке містить

тільки однорідні і неоднорідні плоскі хвилі, що йдуть від неї. Формально умови вводилися в постановку задач, але ніхто не міг стверджувати, що задача, яка ними забезпечена, має єдиний розв'язок. Виняток становив випадок середовища з поглинанням [20], й передбачалося, що нічого не зміниться і в граничному випадку середовища без втрат, для якого ставилися, вирішувалися і аналізувалися практично всі модельні задачі. Але, коли цього вимагала специфіка задач, що розв'язувалися, наприклад, спектральних задач теорії сповільнюваних систем, про це припущення «забували» й шукали особливі частотні точки, в яких ці однорідні задачі мали нетривіальний розв'язок.

Такого роду проблеми в забезпеченні електродинамічної теорії ґраток фундаментальними результатами не дозволяли дати повне обґрунтування алгоритмам, що використовувалися в обчислювальних експериментах, й перешкоджали чіткій фізичній інтерпретації даних, отриманих під час аналізу в резонансних областях варіації значень параметрів. Перша спроба просунутися в цьому напрямі була зроблена в роботах В.Г. Сологуба та В.П. Шестопалова [20], яким вдалося строго зв'язати режим повного проходження плоскої хвилі крізь напівпрозору ґратку з власним режимом ґратки як відкритого періодичного резонатора.

Велика частина проблем, що накопичилися, була вирішена в межах так званої спектральної теорії ґраток, результати якої представлено в книгах [3, 25], [28] (автори Ю.К. Сіренко, І.В. Сухаревський, О.І. Сухаревський та Н.П. Яшина) і [1] (автори Ю.К. Сіренко, S. Strom та Н.П. Яшина). Підходи спектральної теорії дозволили акуратно проаналізувати особливості аналітичного продовження розв'язків еліптичних крайових задач дифракції хвиль в область комплексних, «нефізичних» значень параметрів, встановити роль таких особливостей у формуванні резонансного відгуку структур на зовнішнє збудження монохроматичними квазіперіодичними і компактними джерелами, а також джерелами широкосмугових сигналів. Основні труднощі тут були пов'язані з тим, що аналітичне продовження необхідно було здійснювати в його природних межах – це породило такі екзотичні, на перший

погляд, області варіації комплексних параметрів, як нескінченнолисті ріманові поверхні з алгебраїчними точками розгалуження другого порядку. Але в цих областях функції, що описують поля та їхні комплексні амплітуди, виявляються звичайними мероморфними функціями, наявність точок розгалуження позначається лише на вигляді локальної на поверхні Рімана змінної. Цей факт, доведений з використанням теореми Фредгольма для компактних скінченномероморфних оператор-функцій [31] (М. Reed та В. Simon), відкрив масу можливостей для ефективного якісного й кількісного дослідження усталених і неусталених полів, що формуються ґратками.

Спектральна теорія відкритих одновимірно-періодичних резонаторів (ґраток) дозволила на єдиній методологічній основі вирішити багато математичних, фізичних та прикладних проблем теорії резонансного розсіяння хвиль. Була доведена, зокрема, визначальна роль елементів спектральних множин (особливостей оператор-функцій, що розв'язують еліптичні крайові задачі, продовжені в комплексні області варіації аргументів) й особливостей їхньої динаміки у формуванні резонансного відгуку періодичних структур на будь-яке (монохроматичне й імпульсне) зовнішнє збудження. Аномальні просторово-частотні трансформації полів, ефекти часової області (ефекти квазіповного пропускання і відбиття вузькосмугових імпульсів, ефекти роздвоювання амплітудного центру таких сигналів, пастковий ефект і т.д.), що виявлено аналітично і за результатами розрахунків, які вивчалися раніше в межах дифракційної теорії, отримали чітку прив'язку до природних резонансів періодичної структури, механізми їхньої реалізації були аналітично описані за допомогою локальних теорем про зображення (наслідок мероморфності функцій, які аналізуються). Використання основних якісних результатів спектральної теорії дозволило визначити межі застосування класичних принципів випромінювання, граничного поглинання і граничної амплітуди при виділенні єдиних, «фізичних» рішень еліптичних крайових задач, що моделюють поведінку ґраток як в полі квазіперіодичних, так і в полі компактних джерел, дати строгий аналітичний опис порогових явищ (аномалій

Вуда) в околах точок появи нових гармонік, що поширюються, в просторових спектрах розсіяних полів. Дослідження особливостей динаміки елементів спектральних множин при варіації основних геометричних й електричних параметрів дозволило: (а) відкрити й вивчити механізм лінійної «взаємодії» власних хвиль з локальною (чистий тип $\rightarrow$ гібридний тип $\rightarrow$ попередній чистий тип) і глобальною (чистий тип $\rightarrow$ гібридний тип $\rightarrow$ новий чистий тип) зміною структури їхнього поля; (б) виявити й проаналізувати ефект існування правильних власних хвиль в зоні, де їхня поява традиційно вважалася неможливою; (в) розглянути особливості подолання правильними хвилями зон непропускання хвилевідної структури й довести «зіштовхувальний» характер їх перетворення з хвиль з дійсними сталими поширення в «комплексні» хвилі.

Все, що обговорювалося вище, відносилось до підходів частотної області, пов'язаних з аналізом монохроматичних коливань і хвиль. Підходи часової області, які оперують з сигналами скінченної тривалості, більш універсальні – вони не містять принципових обмежень на геометричні та матеріальні параметри структур, а реалізація відповідних їм обчислювальних схем, як правило, не вимагає обернення будь-яких операторів. До того ж, результати, одержувані з використанням підходів часової області, легко конвертуються в стандартні амплітудно-частотні характеристики. Підходи часової області вимагають великих обчислювальних ресурсів, але при сучасному широкому використанні високопродуктивних комп'ютерів це не є серйозним недоліком. Більш серйозні проблеми виникають при спробах коректно поставити задачі для похило падаючих на ґратки імпульсних хвиль й коректно обмежити простір розрахунків таких популярних методів, як метод кінцевих різниць і метод кінцевих елементів. Істотний внесок у вирішення цих проблем для задач, що описують перехідні стани електромагнітного поля в одновимірно-періодичних ґратках, внесли А.О. Перов, Ю.К. Сіренко, К.Ю. Сіренко та Н.П. Яшина. Відповідні результати досить докладно надано в роботах [1, 3, 28, 32, 33]. Слід зазначити, що так звані «точні поглинаючі умови» в поперечному перерізі регулярного каналу Флоке (смуги, ширини яких дорівнюють періоду ґратки),

побудовані в цих роботах й використовуються для обмеження простору розрахунків сіткових методів розв'язку модельних початково-крайових задач електродинамічної теорії ґраток, по суті, регуляризують ці задачі, забезпечуючи стійкість і збіжність відповідних обчислювальних схем, достовірність і надійність результатів, що описують фізику процесів розсіяння імпульсних хвиль. Умови названі точними тому, що модифікована за їхньою допомогою задача, що має обмежену область аналізу, еквівалентна початковій задачі, область аналізу якої йде на нескінченність.

Розвиток дифракційної електроніки, вимірювальної техніки і техніки антен, в якій періодичним структурам відводиться роль діаграмотвірних, поставило перед теорією ґраток ряд нових, практично важливих задач. Розв'язати їх допоміг досвід, накопичений під час аналізу класичних задач, чималий доробок з методів та техніки матмоделювання, чітке розуміння фізики процесів резонансного розсіяння хвиль. Так, у книзі [22] (автори Л.М. Литвиненко та С.Л. Просвірнін) досліджені особливості дифракції хвильових пучків на простих та подвійних стрічкових ґратках, на ґратці з металевих брусів і гребінці. Проведено математичне моделювання експерименту з дослідження властивостей ґраток та з'ясовані основні умови, що забезпечують отримання в експериментальних дослідженнях характеристик ґраток із заданою точністю.

Більшість робіт зі списку літератури в книзі [27] (автори С.О. Масалов, А.В. Рижак, О.І. Сухаревский, В.М. Шкіль), що виконані різними авторами і в різний час, присвячена одній темі – методам розрахунку несиметричних періодичних структур («жалюзі» та ешелет, що навантажені магнітодіелектричними шарами) й дослідженню режимів поглинання і перерозподілу потоків енергії поля такими структурами. Ця ж тема домінує і в самій книзі; за основні модельні елементи під час дослідження структур, що розсіюють та поглинають, екранів для забезпечення електромагнітної безпеки людини, пристроїв, що розв'язують, і засобів заглушення паразитних і перевідбитих випромінювань обрані дифракційні ґратки, які мають властивість

як ідеальної, так і кінцевої провідності. Тут представлений великий обсяг інформації щодо амплітудно-частотних характеристик полів і розподілу енергії за складовими просторового спектра. Особливу увагу приділено пошуку та аналізу фізичних закономірностей, врахування яких необхідне при створенні покриттів, що забезпечують діапазонне зменшення ефективної поверхні розсіяння різних об'єктів.

Перші, досить серйозні спроби побудувати ефективний розв'язок задач дифракції хвиль на структурах, періодичних за двома напрямками, були зроблені в 90-х роках минулого століття. Дифракційна оптика таких структур вивчалася методами інтегральних рівнянь (D.C. Dobson та A. Friedman [34]), методом часткових областей (O. Bruno та F. Reitich [35]), варіаційними методами (D.C. Dobson [36] та G. Bao [37]). В останній з перелічених робіт відзначимо такі важливі для теорії результати, як доказ теореми про однозначну можливість розв'язання початкової модельної задачі для всіх значень частоти за можливим винятком не більше ніж дискретної множини точок й доказ рівномірної збіжності варіаційних наближень (методу скінченних елементів) до точного розв'язання задачі.

Інтерес до вивчення властивостей двовимірно-періодичних ґраток пов'язаний, перш за все, з перспективами їхнього використання як частотно-селективні поверхні, як основи при створенні штучних матеріалів із біанізотропними властивостями, широкосмугових поглинаючих покриттів і PhBG-матеріалів (Photonic Band-Gap матеріалів). В роботі С.Л. Просвірніна [38] досліджені поляризаційні й частотно-селективні властивості одношарових двовимірно-періодичних смугових ґраток з елементів, що мають форму букв **I**, **C**, **S**, й розташовані у вільному просторі та на діелектричному підкладні з металевим екраном. Ґратки з кіральних **S**-елементів по-різному відбивають і пропускають падаючі на них хвилі з лівою і правою круговою поляризацією. Встановлено умови, за яких тонкі мікросмугові ґратки з **S**-елементів відбивають лінійно поляризовану плоску хвилю з повним перетворенням поляризації в ортогональну.

Методи (метод зшивання і метод інтегральних рівнянь) і результати аналізу періодичних за двома напрямками відбивних й напівпрозорих ґраток (металеві пластини з прямокутними отворами й заглибленнями, структури з магнітодіелектричних паралелепіпедів) розглянуті в роботах [39–42]. Дві останні з них розвивають техніку об'ємних інтегральних рівнянь і систем диференціальних рівнянь щодо амплітуд мод Флоке, апробовану спочатку на скалярних задачах для одновимірно-періодичного магнітодіелектричного шару.

Два нестандартних підходи до розв'язку прикладних задач теорії двовимірно-періодичних структур знаходимо в роботах [43, 44]. Перший з цих підходів базується на покроковому (ряд Тейлора) аналітичному продовженні оберненої матриці розсіяння структури в область комплексних значень частоти – власні частоти і відповідні їм вільні коливання поля визначаються з простої системи однорідних лінійних рівнянь, які визначаються цією матрицею. Другий підхід – аналітичний, використовується під час аналізу багат шарових дротяних середовищ з двовимірно-періодичних ґраток тонких матеріальних узгоджувачів, що характеризуються складною поверхневою провідністю. В основі підходу лежить нелокальне усереднення дротяного середовища із застосуванням додаткових граничних умов на стику тонких (резистивних) матеріалів.

Методи часової області для аналізу 2-D періодичних структур базуються, здебільшого, на стандартній сітковій дискретизації векторних початково-крайових задач [45] в об'ємі, що являє собою обмежену частину прямокутного в поперечному перерізі каналу Флоке. Цей об'єм містить один період ґратки та замикається з боку зон відбиття й проходження віртуальними межами, на яких, зазвичай, ставляться наближені поглинаючі умови (див., наприклад, [46, 47]). Наближені поглинаючі умови – це можливе джерело непередбачуваних помилок в обчисленнях під час аналізу резонансних режимів розсіяння, тобто тоді, коли для акуратної конвертації результатів часової області в звичайні амплітудно-частотні характеристики час «спостереження» необхідно значно збільшувати. Щодо зведення початкової задачі до задачі в одному каналі

Флоке, то тут проблемною є ситуація, пов'язана з так званим «похилим падінням» плоскої імпульсної хвилі, що збуджує. Справа в тому, що похило падаюча хвиля в будь-який фіксований момент часу, який ми б хотіли назвати початковим, вже встигне «замести» частину нескінченної періодичної структури й породити, таким чином, вторинне, розсіяне поле. Це означає, що модельна початково-крайова задача, яка описує процес, не може бути коректно поставлена, оскільки її початкові умови визначаються її розв'язком. І ніякі маніпуляції для «згладжування» очевидних протиріч суті справи не змінюють.

Із зазначеної причини багато дослідників обмежуються розглядом тільки одного випадку – випадку нормального падіння. Так, наприклад, як це зроблено в роботах [48, 49], що присвячені дослідженню дифракції електромагнітних хвиль оптичного й інфрачервоного діапазонів на періодичній структурі з плоских металевих елементів складної форми, розташованих на товстому діелектричному підкладні. Для обчислень автори (В.В. Хардіков, К.О. Ярмо та С.Л. Просвірнін) використовують псевдоспектральний метод [50] з експоненціальними базисними функціями ряду Фур'є, обґрунтовуючи свій вибір тим, що в часовій області цей метод призводить до більш «швидких» обчислювальних схем, ніж FDTD-метод [45]. Псевдоспектральний метод часової області вдало доповнений методом узагальнених матриць розсіювання частотної області, що дозволяє (в ряді окремих, але важливих для практики випадків) звести до мінімуму витрати на реалізацію схеми за наявності дуже товстих діелектричних підкладнів, а в перспективі, й під час розрахунку багат шарових структур розглянутого типу. Ефективність підходу переконливо продемонстрована цікавими фізичними результатами – автори зробили ряд узагальнюючих висновків щодо природи та закономірностей в реалізації розглянутих ними резонансних режимів розсіювання хвиль, які названо «резонансами на запертих модах».

Автори роботи [51] (В.А. Ванін та С.Л. Просвірнін) також обмежуються випадком нормального падіння. Але техніка роботи з модельною початково-крайовою задачею у них інша. На основі потокової форми рівнянь Максвелла

вони будують нову різницеву схему і для підвищення ефективності алгоритму використовують принцип її монотонізації. У роботі наведено деякі результати розрахунків у разі ґраток зі стрічкових диполів та об'ємних С-подібних елементів.

1.3 Короткий огляд робіт за тематикою фотонних кристалів

Фотонними кристалами називають новий клас штучних матеріалів з трансляційною симетрією, період якої порівнянний із довжиною хвилі (див. монографії [30] (автори J.D. Joannopoulos, S.G. Johnson, J.N. Winn та R.D. Meade) і [52] (автори J.-M. Lourtioz, H. Bensty, V. Berger, J.M. Gerard, D. Maestre та A. Tcheltnokov). Ці матеріали цікаві, перш за все, своїми застосуваннями, підставою для яких є такі їхні фундаментальні властивості: (а) існування пов'язаних з періодичністю фотонного кристала так званих «заборонених зон» в спектрі його власних електромагнітних станів (у відповідному спектральному діапазоні електромагнітний сигнал не може увійти в кристал, або вийти з нього, незалежно від того, в якому напрямку він поширюється); (б) напрямки фазових і групових швидкостей власних хвиль в кристалі, як правило, не збігаються (незвичайне, в тому числі й «ліве», заломлення на межі розділення середовищ). Основні задачі теорії фотонних кристалів пов'язані з: (а) розрахунком їхніх дисперсійних характеристик; (б) аналізом різного типу «дефектів» в їхній регулярній структурі, які розглядаються як деякі функціональні елементи або вузли, що керовано перетворюють первинний сигнал; (в) синтезом матеріалів, які забезпечують розв'язок різних прикладних задач мікрохвильової техніки й оптики.

Задачі першого блоку, в яких розглядаються нескінченні у всіх трьох напрямках структури, розв'язуються, як правило, в межах одного з трьох стандартних підходів частотної області методом розкладання за плоскими хвилями, методом кінцевих різниць або методом кінцевих елементів [30, 52].

Якісна програмна реалізація методу плоских хвиль, вірніше, того варіанту методу, який описаний в роботі [53] (автори S.G. Johnson та J.D. Joannopoulos), надана загальнодоступним пакетом «MIT Photonic-Bands» [54]. Скориставшись цим пакетом, можна отримати набір даних, необхідний для подальшого аналізу об'єкта, що досліджується (див, наприклад, [55]), – побудувати ізочастоти нескінченної періодичної структури для обраної смуги пропускання й в координатах, пов'язаних з хвильовими векторами власних хвиль, а також дисперсійні залежності для скінченного числа таких хвиль, зазвичай, на відрізках прямих, що з'єднують кутові точки незвідної частини зони Бріллюена. Використання методу розкладання за плоскими хвилями нерідко призводить до нестійкості обчислювальних схем [52]. Причину багато хто бачить у розривах функцій, що описують матеріальні параметри періодичних структур. У нас є підстави вважати, що можуть бути й інші причини, пов'язані з математичною некоректністю ряду процедур алгоритмізації методу (див. підрозділ 1.4).

При числовому розв'язанні задач другого блоку використовуються класичні моделі теорії дифракції хвиль (моделі компактних неоднорідностей вільного простору, які помістили в поле струмових джерел або в поле пучків плоских хвиль), або аналогічні моделі сіткових методів часової області (див., наприклад, [56–59]). Конкретний вибір визначається фізичним змістом проблеми, яка розглядається, й дослідник, який чітко представляє її значення, завжди знайде серед методів і обчислювальних схем, що розроблено за останні 60 років, ті, які йому найбільше підходять. Фізичний аналіз функціональних елементів, роль яких відіграють різного типу «дефекти» в регулярній структурі кристала, базується на досить надійних числових результатах, але він явно не відповідає академічним стандартам, прийнятим в обчислювальній електродинаміці і теорії антенно-фідерних трактів (див., наприклад, книги [23, 32, 60, 61]). І в цьому немає провини дослідників, вони просто намагаються відповісти на цікаві й важливі для різних застосувань питання, використовуючи характеристики, доступні для прямого спостереження. В теорії фотонних кристалів визначення характеристик і зв'язків між ними, які дозволили б чітко

фіксувати виявлені закономірності, робити узагальнюючі висновки за результатами числових експериментів (очевидні аналоги з теорії хвильоводів: комплексні амплітуди й фазові швидкості спрямованих хвиль, їхні точки відсічки, аналітичні співвідношення закону збереження енергії та ін.), поки що не забезпечено методологічно.

Найчастіше, в задачах третього блоку об'єктом аналізу є обмежені по висоті шари 2-D або 3-D фотонних кристалів [62]. По суті, це звичайні одновимірно- або двовимірно-періодичні ґратки. Тому методи, що використовуються для аналізу фотонних структур такого типу, не довелося розробляти з нуля – спираючись на результати електродинамічної теорії ґраток можна досить впевнено розв'язувати й специфічні задачі теорії фотонних кристалів. Тільки фізика тут дещо інша: на досить товстих фотонних структурах (на шарах товщиною від семи-восьми періодів і вище) в тому випадку, коли в їхніх зонах відбиття і проходження є тільки основні просторові гармоніки, що поширюються, реалізуються надширокосмугові ефекти повного відбиття падаючих плоских хвиль. На звичайних ґратках ефекти такого типу точкові, і пов'язані вони зі збудженням «вільних» коливань поля, що відповідають резонансним (власним) комплексним частотам [1, 25]. Ці частоти утворюють дискретну множину, і для розширення смуги, в якій ґратка дуже погано пропускає набіжну хвилю, необхідно дві або три власні частоти зблизити в комплексному просторі.

На обмежених за висотою шарах фотонних кристалів, в яких фазові і групові швидкості хвиль, що поширюються, по-різному спрямовані, реалізується маса ефектів, обумовлених незвичайним заломленням хвиль на їхніх верхніх і нижніх гранях (див., наприклад, статті [57, 58, 63]). В цьому відношенні такі шари близькі до так званих «метаматеріалів», в тому числі, й до «лівих» матеріалів [64]. Явища, пов'язані з незвичайним заломленням, спостерігаються також всередині дефектних кристалів, поблизу границь хвилевідних і резонансних порожнин. Тут може бути реалізований, наприклад, ефект зворотного випромінювання типу Вавилова-Черенкова, випромінювання,

що породжується не зарядами, що рухаються в кристалі [55], а електромагнітної хвилею, що поширюється в його порожнині.

1.4 Проблемні питання теорії двовимірно-періодичних ґраток і 2-D фотонних кристалів

Навіть короткий огляд літератури, що присвячено двовимірно-періодичним ґраткам і 2-D фотонним кристалом, дозволяє зафіксувати не тільки помітні досягнення в їхній електродинамічній теорії, але й позначити проблемні питання, вирішення яких може призвести до значного кількісного та якісного зростання результатів, що одержуються в межах цієї теорії. Так, двовимірно-періодичні ґратки розраховуються, здебільшого, прямими числовими методами: методами інтегральних рівнянь і методом часткових областей (методом зшивання) під час роботи в частотній області, FDTD-методом під час роботи в часовій області. «Інтелектуальне ядро» моделей, що відповідають цим методам, давно не оновлювалося, останні досягнення тут пов'язані з розробкою вже класичного Yee-алгоритму [65] і створенням теорії ідеально узгодженого з вакуумом шару, що поглинає електромагнітні хвилі, які на нього приходять [66]. Необхідно виправляти ситуацію для того щоб можна було ефективно використовувати переваги сучасної методології отримання нових знань, методології, що базується на математичному моделюванні і обчислювальному експерименті [67].

З можливих напрямків такої роботи в межах електродинамічної теорії двовимірно-періодичних ґраток виділимо наступні п'ять: (а) здійснення коректної постановки модельних задач, що дозволяють досить обґрунтовано аналізувати випадок похило падаючих хвиль; (б) розробку і впровадження в обчислювальні схеми FDTD-методу точних поглинаючих умов для віртуальних меж в прямокутному за формою поперечному перерізі регулярних каналів Флоке; (в) розроблення та впровадження в обчислювальні схеми FDTD-методу алгоритмів методу транспортних операторів (просторово-часового аналога

методу узагальнених матриць розсіяння), що дозволяє істотно скоротити обчислювальні ресурси під час аналізу багатошарових структур та структур на товстих підкладнях; (г) виведення строгих аналітичних наслідків з теореми Пойнтінга про комплексну потужність (співвідношення балансу енергії) і леми Лоренца (співвідношення взаємності) для двовимірно-періодичних ґраток скінченної товщини, що збуджуються поперечно-електричними або поперечно-магнітними плоскими хвилями; (д) вирішення низки ключових питань спектральної теорії двовимірно-періодичних ґраток, що вкрай необхідно для достовірного фізичного аналізу процесів резонансного розсіяння імпульсних і монохроматичних хвиль. Ми зупинилися саме на цих напрямках, оскільки добре знаємо, як вони розроблялися раніше, в теорії одновимірно-періодичних ґраток, й наскільки корисним для розвитку цієї теорії виявилось використання відповідних результатів [1, 3, 23, 25].

Ми вже говорили про те, що обчислювальні схеми методу розкладання за плоскими хвилями для розрахунку дисперсійних характеристик 2-D фотонних кристалів часто виявляються нестійкими. Не виключено, що причина може бути пов'язана також з наступною, характерною для цього методу обставиною. Строго кажучи, спектр власних електромагнітних станів кристала визначається в межах цього методу нетривіальними розв'язками деякої нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Зрозуміло, що під час розрахунків ця нескінченна система рівнянь замінюється скінченною (редукується), але коректність цього переходу, яка, звичайно ж, вимагає обґрунтування [25, 60, 68, 69], ніким не аналізується. А якщо умови, що гарантують можливість застосування методу редукції, не виконані, то розв'язки скінченних систем рівнянь, не «зобов'язані» збігатися до точного розв'язку задачі.

Компактні 2-D фотонні кристали з різного типу «дефектами» найчастіше досліджують FDTD-методом, простір розрахунку якого обмежується за допомогою наближених поглинаючих умов [45, 66]. Такого типу умови не дуже надійні в тому випадку, коли розглядаються резонансні режими розсіяння електромагнітних хвиль, й досить акуратний перехід до характеристик

частотної області вимагає тривалих інтервалів спостереження. Проблема знімається за використанням точних поглинаючих умов – вони вже побудовані, реалізовані в універсальних програмних пакетах, відповідні обчислювальні схеми добре апробовані, а їх реалізація принесла вже чимало цікавих фізичних результатів [1, 3, 32, 61].

Значно більше зусиль і непрості роботи потребуватиме розробка й впровадження таких підходів до числового аналізу і синтезу функціональних елементів («дефектів») у фотонних кристалах, які б оперували загально визнаними та доступними для розрахунків характеристиками, характеристиками, які дозволяли би робити однозначні висновки, узагальнювати й систематизувати отримані в ході обчислювальних експериментів дані.

1.5 Висновки до розділу 1

Дослідження в області періодичних структур не втрачають актуальності. Виникають нові теоретичні та прикладні задачі, з'являється потреба в нових підходах щодо їх розв'язання. Якість результатів, що здавалася прийнятною ще вчора, сьогодні потребує вдосконалення. Тем для пошукових робіт вистачає всім: й тим, хто будує математичні моделі та реалізує їх в зручних для користувача комплексах програм; й тим, хто теоретично та експериментально досліджує фізику хвильових та коливальних процесів в різного типу об'єктах, що містять періодичні структури; й тим, хто пропонує і реалізує нові схеми використання періодичних структур в науковому приладобудуванні, мікрохвильовій техніці, оптиці та електроніці; й тим, хто синтезує нові матеріали з незвичайними властивостями, що перевертають наші уявлення про можливе і неможливе.

В даному розділі (див. також [8]) відзначені деякі досягнення і проблеми з того напрямку в теорії двовимірно-періодичних структур, в якому виконана дисертаційна робота. Тут висвітлений матеріал, в якому вказані конкретні

задачі, розв'язок яких може бути цікавим, як для теорії, так і для практики. Частина з цих задач, що пов'язані з розвитком і використанням в теорії двовимірно-періодичних структур методів часової області, буде розглянута в основних розділах дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 2

ДВОВИМІРНО-ПЕРІОДИЧНІ ҐРАТКИ В ПОЛІ ІМПУЛЬСНИХ І МОНОХРОМАТИЧНИХ ХВИЛЬ

У цьому розділі наведено аналітичні результати, що становлять теоретичну основу для числового аналізу хвильових і коливальних процесів у двовимірно-періодичних ґратках. Побудова тривимірних, векторних моделей періодичних структур базується на зображеннях у часовій області й орієнтована на реалізацію цих моделей сітковими методами.

2.1 Основні рівняння, граничні та початкові умови

Крайові та початково-крайові задачі для системи диференціальних рівнянь Максвелла лежать в основі електромагнітної теорії як частотної, так і часової області. Розв'язки цих задач описують просторово-частотні й просторово-часові трансформації електромагнітного поля в різних електродинамічних структурах: дифракційних ґратках, хвилеводах, відкритих резонаторах, випромінюючих елементах антен та ін. У цьому розділі при постановці та аналізі модельних задач теорії двовимірно-періодичних ґраток ми будемо виходити з системи

$$\operatorname{rot} \vec{H}(g, t) = \eta_0^{-1} \frac{\partial [\vec{E}(g, t) + \chi_\varepsilon(g, t) * \vec{E}(g, t)]}{\partial t} + \chi_\sigma(g, t) * \vec{E}(g, t) + \vec{j}(g, t), \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(g, t) = -\eta_0 \frac{\partial [\vec{H}(g, t) + \chi_\mu(g, t) * \vec{H}(g, t)]}{\partial t}, \quad (2.2)$$

що становить собою систему роторних рівнянь Максвелла для електромагнітних хвиль, які поширюються в стаціонарному, локально-

неоднорідному, ізотропному та дисперсному середовищі [45, 70]. Тут $\vec{E}(g, t) = \{E_x, E_y, E_z\}$ та $\vec{H}(g, t) = \{H_x, H_y, H_z\}$ – вектори напруженості електричного й магнітного полів; $\eta_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ – імпеданс вільного простору; ϵ_0 та μ_0 – електрична та магнітна сталі вакууму; $\vec{j}(g, t)$ – щільність сторонніх струмів; $\chi_\epsilon(g, t)$, $\chi_\mu(g, t)$ та $\chi_\sigma(g, t)$ – електрична, магнітна сприйнятливості та сприйнятливості провідності; $g = \{x, y, z\}$ – це точка в просторі $\mathbb{R}^3$; x , y та z – Декартові координати. Через $f_1(t) * f_2(t) = \int f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$ ми позначаємо операцію згортки.

У випадку, коли в деякій області $G \subset \mathbb{R}^3$ частотна дисперсія відсутня, для точок $g \in G$ маємо $\chi_\epsilon(g, t) = \delta(t)[\epsilon(g) - 1]$, $\chi_\mu(g, t) = \delta(t)[\mu(g) - 1]$, $\chi_\sigma(g, t) = \delta(t)\sigma(g)$, й рівняння (2.1) та (2.2) набувають такого вигляду:

$$\text{rot} \vec{H}(g, t) = \eta_0^{-1} \epsilon(g) \frac{\partial \vec{E}(g, t)}{\partial t} + \sigma(g) \vec{E}(g, t) + \vec{j}(g, t); \quad (2.3)$$

$$\text{rot} \vec{E}(g, t) = -\eta_0 \mu(g) \frac{\partial \vec{H}(g, t)}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Тут $\sigma(g) \geq 0$ – питома провідність локально-неоднорідного середовища, $\epsilon(g)$ та $\mu(g)$ – її відносні діелектрична й магнітна проникності, а $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака. У вільному просторі (в вакуумі) $\epsilon(g) = \mu(g) = 1$, а $\sigma(g) = 0$, тож ми можемо розглядати такі системи векторних рівнянь [1], що є еквівалентними до (2.1), (2.2):

$$\begin{cases} \left[\Delta - \text{grad div} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{E}(g, t) = \vec{F}_E(g, t), & \vec{F}_E(g, t) = \eta_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}(g, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}(g, t) = -\eta_0^{-1} \text{rot} \vec{E}(g, t) \end{cases} \quad (2.5)$$

та

$$\begin{cases} \left[\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{H}(g, t) = \vec{F}_H(g, t); & \vec{F}_H(g, t) = -\text{rot } \vec{j}(g, t) \\ \eta_0^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(g, t) = \text{rot } \vec{H}(g, t) - \vec{j}(g, t). \end{cases} \quad (2.6)$$

Тут $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа. Оператор $\text{grad div } \vec{E} = \varepsilon_0^{-1} \text{grad}(\rho_1 + \rho_2)$ (функції $\rho_1(g, t)$ та $\rho_2(g, t)$, що входять до нього, описують об'ємну щільність індукованих й сторонніх електричних зарядів) у векторному рівнянні (2.5) для поля $\vec{E}(g, t)$ можна випустити, оскільки в однорідному середовищі, де $\varepsilon = \text{const}$ та $\sigma = \text{const}$, $\rho_1(g, t) = \rho_1(g, 0) \exp(-t\eta_0\sigma/\varepsilon)$, якщо $\rho_1(g, 0) = 0$, то $\rho_1(g, t) = 0$ для будь-якого $t > 0$ [1]. Доданок, що залишився, $-\varepsilon_0^{-1} \text{grad } \rho_2$ – можна перенести до правої частини хвильового рівняння, що визначає струмові джерела електричного поля.

Рівняння (2.1)–(2.6) – це рівняння гіперболічного типу [71]. Початково-крайова задача для них повинна містити початкові (при $t = 0$) й граничні умови (на всіх зовнішніх та внутрішніх межах області аналізу Q). У тривимірних векторних або скалярних задачах область аналізу $Q = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\text{int } S}$ – це частина простору $\mathbb{R}^3$, що обмежена поверхнями S , які є межами областей $\text{int } S$, заповнених ідеальним металом. У так званих відкритих задачах Q тягнеться до нескінченності уздовж одного або декількох просторових напрямів.

Система граничних умов для початково-крайових задач формулюється на основі таких фактів [70]:

- на поверхні S ідеального провідника тангенційна компонента вектора напруженості електричного поля й нормальна компонента вектора напруженості магнітного поля дорівнюють нулю в будь-який момент часу спостереження t :

$$\vec{E}_{tg}(g,t)\Big|_{g \in S} = 0, \quad \vec{H}_{nr}(g,t)\Big|_{g \in S} = 0; \quad t \geq 0; \quad (2.7)$$

- на поверхнях $S^{\varepsilon, \mu, \sigma}$, під час перетину яких матеріальні властивості середовища змінюються стрибком, так само, як у всій області Q , тангенційні компоненти $\vec{E}_{tg}(g,t)$ та $\vec{H}_{tg}(g,t)$ векторів напруженості електричного й магнітного полів повинні бути неперервними;

- в околах особливих точок меж області Q (точок, в яких вектори нормалі й дотичної не визначені) щільність енергії поля повинна бути просторово інтегрованою;

- якщо область Q необмежена та поле $\{\vec{E}(g,t), \vec{H}(g,t)\}$ породжується джерелами, носії яких обмежені в Q , то для будь-якого скінченного інтервалу часу $(0,T)$ можна побудувати віртуальну межу $M \subset Q$, досить віддалену від джерел, таку, що

$$\{\vec{E}(g,t), \vec{H}(g,t)\}\Big|_{g \in M, t \in (0,T)} = 0. \quad (2.8)$$

Початкові (в момент часу $t = 0$) умови задають початковий стан системи, що змінюється потім (при $t > 0$) згідно з диференціальними рівняннями та граничними умовами. Задання початкових станів $\vec{E}(g,0)$ та $\vec{H}(g,0)$ в системі (2.1), (2.2) або системі (2.3), (2.4) еквівалентно заданню $\vec{E}(g,0)$ та $\left[\partial \vec{E}(g,t)/\partial t\right]\Big|_{t=0}$ ($\vec{H}(g,0)$ та $\left[\partial \vec{H}(g,t)/\partial t\right]\Big|_{t=0}$) в диференціальних формах другого порядку (щодо t), до яких зводяться системи (2.1), (2.2) при виключенні з них вектора $\vec{H}$ (вектора $\vec{E}$) (див. (2.5), (2.6)). Так, наприклад, під час постановки початково-крайової задачі хвильове рівняння з (2.5) слід забезпечити початковими умовами

$$\vec{E}(g,0) = \vec{\varphi}(g), \quad \left. \frac{\partial \vec{E}(g,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \vec{\psi}(g), \quad g \in \bar{Q}. \quad (2.9)$$

Функції $\vec{\varphi}(g)$, $\vec{\psi}(g)$ та $\vec{F}_{E,H}(g,t)$ ($t > 0$), що описують миттєві й струмові джерела, зазвичай мають обмежений носій в замиканні області Q . Струмові джерела поділяють на жорсткі та м'які [45]: м'які джерела не мають матеріальних носіїв і тому не розсіюють електромагнітні хвилі. За допомогою миттєвих джерел можна задати імпульсну хвилю $\vec{U}^i(g,t)$, яка збуджує об'єкт, що досліджується: $\vec{\varphi}(g) = \vec{U}^i(g,0)$ та $\vec{\psi}(g) = \left[\partial \vec{U}^i(g,t) / \partial t \right] \Big|_{t=0}$. Сигнал $\vec{U}^i(g,t)$ повинен задовольняти відповідному хвильовому рівнянню й принципу причинності. Слід також стежити за тим, щоб до моменту часу $t = 0$ сигнал $\vec{U}^i(g,t)$ не «контактував» з об'єктом, що розсіює.

Останнє, очевидно, неможливо, якщо нескінченна періодична ґратка збуджується плоскою імпульсною хвилею, що поширюється в напрямку, відмінному від нормалі до шару, в який цю ґратку можна помістити. Такі хвилі до будь-якого початкового моменту часу t встигають «замести» якусь частину поверхні ґратки (див. рис. 2.1) й породити розсіяну хвилю $\vec{U}^s(g,t)$.

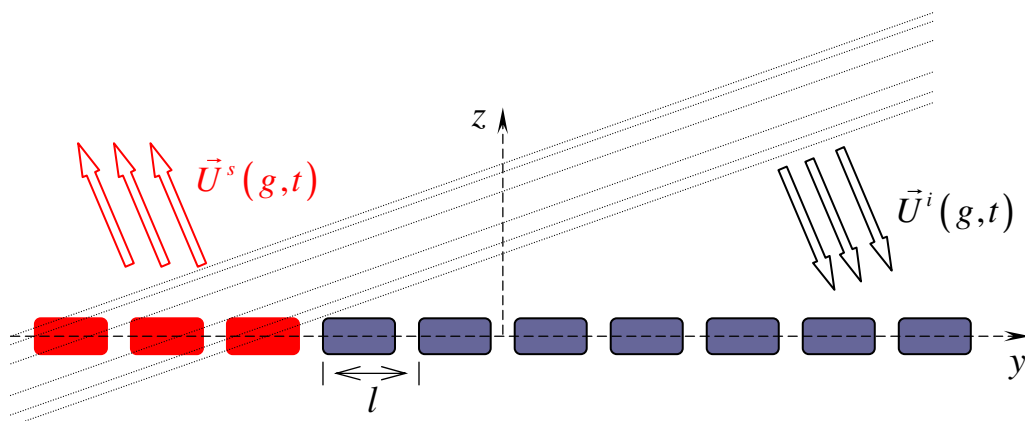


Рисунок 2.1 – Збудження нескінченної (в напрямку y) ґратки плоскою імпульсною хвилею $\vec{U}^i(g,t)$. Момент часу $t = 0$

Як наслідок, математично коректне моделювання процесу стає неможливим – дані, що необхідні для постановки початково-крайової задачі, визначаються фактично розв’язком цієї задачі.

2.2 Часова область: початково-крайові задачі

Нехай періодична структура, один з можливих варіантів геометрії якої зображений на рис. 2.2, збуджується фінітними струмовими ($\vec{j}(g,t)$) й миттєвими ($\vec{E}(g,0)=\vec{\varphi}_E(g)$, $\vec{H}(g,0)=\vec{\varphi}_H(g)$) джерелами. Просторово-часові трансформації електромагнітного поля $\{\vec{E}(g,t), \vec{H}(g,t)\}$, що формуються системою «джерела – ґратка», можна визначити, розв’язавши таку початково-крайову задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H}(g,t) = \eta_0^{-1} \frac{\partial [\vec{E}(g,t) + \chi_\varepsilon(g,t) * \vec{E}(g,t)]}{\partial t} + \chi_\sigma(g,t) * \vec{E}(g,t) + \vec{j}(g,t), \\ \text{rot} \vec{E}(g,t) = -\eta_0 \frac{\partial [\vec{H}(g,t) + \chi_\mu(g,t) * \vec{H}(g,t)]}{\partial t}; \quad g = \{x, y, z\} \in Q; \quad t > 0 \\ \vec{E}(g,0) = \vec{\varphi}_E(g), \quad \vec{H}(g,0) = \vec{\varphi}_H(g); \quad g \in \bar{Q} \\ \vec{E}_{tg}(g,t)|_{g \in S} = 0, \quad \vec{H}_{nr}(g,t)|_{g \in S} = 0; \quad t \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Тут $\bar{Q}$ – замикання області Q ; $\chi_{\varepsilon,\mu,\sigma}(g,t)$ – кусково-неперервні функції. Передбачається також, що поверхні S є достатньо гладкими і що виконуються всі умови, пов’язані з вимогою неперервності тангенційних компонент векторів напруженості електромагнітного поля.

Область аналізу $Q = R^3 \setminus \overline{\text{int} S}$ займає практично весь простір R^3 . Для такої великої області розраховувати на ефективний аналітичний або числовий розв’язок задачі (2.10) можна в таких двох випадках: (а) задача (2.10)

вироджується в звичайну задачу Коші ($\overline{\text{int} S} = \emptyset$, середовище є однорідним і недисперсним, носії функцій $\vec{j}(g, t)$ та $\vec{\varphi}_{E(H)}(g)$ – обмежені); (б) функції $\vec{j}(g, t)$ та $\vec{\varphi}_{E(H)}(g)$ мають таку ж саму симетрію зміщення, як і періодична структура. У випадку (а) можна (з деякими несуттєвими обмеженнями на функції джерел) побудувати класичний й узагальнений розв’язок задачі, скориставшись відомою формулою Пуассона [71]. У випадку (б) можна скоротити область аналізу до області $Q^N = \{g \in Q : 0 < x < l_x; 0 < y < l_y\}$, доповнюючи задачу (2.10) умовами періодичності [1] на бокових поверхнях прямокутного каналу Флоке $R = \{g \in R^3 : 0 < x < l_x; 0 < y < l_y\}$, а потім побудувати числовий розв’язок задачі, скориставшись одним із сіткових методів.

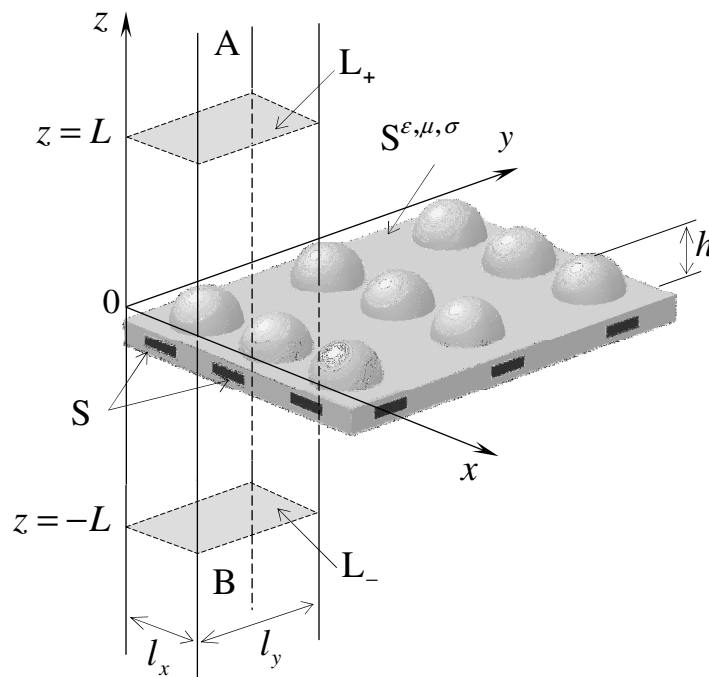


Рисунок 2.2 – Загальна геометрія задачі

Виявляється, що таке скорочення області аналізу можливе і в більш загальному випадку, якщо замість функцій $f(g, t)$, що описують реальні

джерела, в задачі (2.10) перейти до їхніх образів $f^N(g, t, \Phi_x, \Phi_y)$:

$$\begin{aligned} f(g, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(z, t, \Phi_x, \Phi_y) \exp\left(2\pi i \Phi_x \frac{x}{l_x}\right) \exp\left(2\pi i \Phi_y \frac{y}{l_y}\right) d\Phi_x d\Phi_y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^N(g, t, \Phi_x, \Phi_y) d\Phi_x d\Phi_y. \end{aligned} \quad (2.11)$$

З (2.11) випливає

$$\begin{aligned} f^N \left\{ \frac{\partial f^N}{\partial x} \right\} (x + l_x, y, z, t, \Phi_x, \Phi_y) &= e^{2\pi i \Phi_x} f^N \left\{ \frac{\partial f^N}{\partial x} \right\} (x, y, z, t, \Phi_x, \Phi_y), \\ f^N \left\{ \frac{\partial f^N}{\partial y} \right\} (x, y + l_y, z, t, \Phi_x, \Phi_y) &= e^{2\pi i \Phi_y} f^N \left\{ \frac{\partial f^N}{\partial y} \right\} (x, y, z, t, \Phi_x, \Phi_y), \end{aligned}$$

або, в інших позначеннях,

$$D[f^N](x + l_x, y) = e^{2\pi i \Phi_x} D[f^N](x, y), \quad D[f^N](x, y + l_y) = e^{2\pi i \Phi_y} D[f^N](x, y).$$

Використання джерел $f^N(g, t, \Phi_x, \Phi_y)$ та принципу суперпозиції дозволяє переписати задачу (2.10) в такому еквівалентному вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} \text{rot} \vec{H}^N(g, t) &= \eta_0^{-1} \frac{\partial [\vec{E}^N(g, t) + \chi_\varepsilon(g, t) * \vec{E}^N(g, t)]}{\partial t} + \chi_\sigma(g, t) * \vec{E}^N(g, t) + \vec{j}^N(g, t), \\ \text{rot} \vec{E}^N(g, t) &= -\eta_0 \frac{\partial [\vec{H}^N(g, t) + \chi_\mu(g, t) * \vec{H}^N(g, t)]}{\partial t}; \quad g \in Q^N, \quad t > 0 \\ \vec{E}^N(g, 0) &= \vec{\varphi}_E^N(g), \quad \vec{H}^N(g, 0) = \vec{\varphi}_H^N(g); \quad g \in \bar{Q}^N \\ D[\vec{E}^N(\vec{H}^N)](l_x, y) &= e^{2\pi i \Phi_x} D[\vec{E}^N(\vec{H}^N)](0, y); \quad 0 \leq y \leq l_y, \\ D[\vec{E}^N(\vec{H}^N)](x, l_y) &= e^{2\pi i \Phi_y} D[\vec{E}^N(\vec{H}^N)](x, 0); \quad 0 \leq x \leq l_x, \\ \vec{E}_{tg}^N(g, t)|_{g \in S} &= 0, \quad \vec{H}_{nr}^N(g, t)|_{g \in S} = 0; \quad t \geq 0, \end{aligned} \right. \quad (2.12)$$

$$\vec{E}(g, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}^N(g, t, \Phi_x, \Phi_y) d\Phi_x d\Phi_y, \quad \vec{H}(g, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{H}^N(g, t, \Phi_x, \Phi_y) d\Phi_x d\Phi_y, \quad (2.13)$$

Відомо [1, 3, 72], що за певних обмежень на функції $\chi_\varepsilon(g, t)$, $\chi_\mu(g, t)$, $\chi_\sigma(g, t)$, $\vec{j}^N(g, t)$, $\vec{\varphi}_E^N(g)$ та $\vec{\varphi}_H^N(g)$ задача (2.12) є однозначно-розв'язуваною в просторі Соболева $W_2^1(Q^{N,T})$, де $Q^{N,T} = Q^N \times (0, T)$ і $(0, T)$ – інтервал часу спостереження. Виходячи з цього факту, далі скрізь припускаємо, що задача (2.12) для всіх $t \in [0, T]$ має узагальнений розв'язок із простору $W_2^1(Q^{N,T})$ і що в цьому просторі справедлива теорема єдиності. Тут символ ‘ $\times$ ’ використовується для позначення прямого добутку двох множин; $(0, T)$ і $[0, T]$ – відкритий і закритий інтервали; $W_m^n(G)$ – множина всіх елементів $\vec{f}(g)$ з $L_m(G)$, що мають узагальнені похідні до порядку n включно з простору $L_m(G)$; $L_m(G)$ – простір функцій $\vec{f}(g) = \{f_x(g), f_y(g), f_z(g)\}$ ($g \in G$) таких, що функції $|f_{x,y,z}(g)|^m$ є інтегрованими в G .

2.3 Точні поглинаючі умови для прямокутного каналу Флоке

В цьому підрозділі ми наведемо низку важливих результатів, що пов'язані з коректним обмеженням простору розрахунку у відкритих тривимірних початково-крайових задачах електродинамічної теорії ґраток. У попередньому підрозділі, скориставшись інтегральним перетворенням функцій, що описують фізично реалізовані джерела, ми звели задачу (2.10) для нескінченних періодичних структур до задачі (2.12) для компактних неоднорідностей в каналі Флоке R або, іншими словами, для компактних неоднорідностей у прямокутному хвилеводі з квазіперіодичними граничними умовами. Продовжимо обмеження простору розрахунку і редукуємо область

аналізу Q^N задачі (2.12) до області $Q_L^N = \{g \in Q^N : |z| < L\}$ (див. рис. 2.2). Припускаємо, що всі джерела поля та всі неоднорідності каналу Флоке R лежать всередині цієї області. Побудуємо для віртуальних меж $L_{\pm}$ ($z = \pm L$) області Q_L^N такі умови, додавання яких до задачі (2.12) не змінить ані її клас коректності, ані її розв'язок $\vec{E}^N(g, t)$, $\vec{H}^N(g, t)$. Це будуть так звані «точні поглинаючі умови». Їхня загальна теорія детально викладена в роботах [1-3, 32, 73].

Опустимо верхній індекс N для всіх величин із системи (2.12) і, розділяючи змінні z , t та x , y , зобразимо розв'язок $\vec{E}(g, t)$ цієї задачі в замиканні областей $A = \{g \in R : z > L\}$ та $B = \{g \in R : z < -L\}$ у такому вигляді:

$$\vec{E}(g, t) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \vec{u}_{nm}^{\pm}(z, t) \mu_{nm}(x, y); \quad \{x, y\} \in \bar{R}_z, \quad \begin{cases} z \geq L \\ z \leq -L \end{cases}, \quad t \geq 0. \quad (2.14)$$

Тут $R_z = (0 < x < l_x) \times (0 < y < l_y)$; $\{\mu_{nm}(x, y)\}$ ($n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – повна в $L_2(R_z)$, ортонормована система функцій

$$\mu_{nm}(x, y) = (l_x l_y)^{-1/2} e^{i\alpha_n x} e^{i\beta_m y}; \quad \alpha_n = 2\pi(\Phi_x + n)/l_x, \quad \beta_m = 2\pi(\Phi_y + m)/l_y;$$

і $\lambda_{nm}^2 = \alpha_n^2 + \beta_m^2$. Просторово-часові амплітуди $\vec{u}_{nm}^{\pm}(z, t)$ хвиль $\vec{E}(g, t)$, що йдуть від ґратки у зони $z \geq L$ та $z \leq -L$, задовольняють рівнянням

$$\begin{cases} \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda_{nm}^2 \right] \vec{u}_{nm}^{\pm}(z, t) = 0; & t > 0 \\ \vec{u}_{nm}^{\pm}(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_{nm}^{\pm}(z, t) \Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

(передбачається, що до моменту часу $t = 0$ поле, породжене струмовими й

миттєвими джерелами, які зосереджені в Q_L , не встигає дійти до меж $L_{\pm}$).

Для розв'язків $\vec{u}_{nm}^{\pm}(z, t)$ векторних задач (2.15), так само, як у випадку таких самих скалярних задач [1, 32, 73], отримаємо

$$\vec{u}_{nm}^{\pm}(\pm L, t) = \mp \int_0^t J_0[\lambda_{nm}(t - \tau)] \frac{\partial \vec{u}_{nm}^{\pm}(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=\pm L} d\tau; \quad t \geq 0 \quad (2.16)$$

– точні нелокальні поглинаючі умови для просторово-часових амплітуд поля $\vec{E}(g, t)$ в поперечних перерізах $z = \pm L$ каналу Флоке R . Використовуючи (2.14), отримуємо з (2.16) (див. [32])

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, \pm L, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial \vec{W}_E^{\pm}(x, y, t, \varphi)}{\partial t} d\varphi; \quad \{x, y\} \in \bar{R}_z, \quad t \geq 0; \\ &\left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sin^2 \varphi \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \vec{W}_E^{\pm}(x, y, t, \varphi) = \mp \frac{\partial \vec{E}(g, t)}{\partial z} \Big|_{z=\pm L}; \\ &\{x, y\} \in R_z, \quad t > 0 \\ &\vec{W}_E^{\pm}(x, y, t, \varphi) \Big|_{t=0} = \frac{\partial \vec{W}_E^{\pm}(x, y, t, \varphi)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0; \quad \{x, y\} \in \bar{R}_z \\ &D[\vec{W}_E^{\pm}](l_x, y) = e^{2\pi i \Phi_x} D[\vec{W}_E^{\pm}](0, y); \quad 0 \leq y \leq l_y, \\ &D[\vec{W}_E^{\pm}](x, l_y) = e^{2\pi i \Phi_y} D[\vec{W}_E^{\pm}](x, 0); \quad 0 \leq x \leq l_x; \quad t \geq 0 \end{aligned} \right. \quad (2.17) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, \pm L, t) &= \mp \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^t J_0[\lambda_{nm}(t - \tau)] \times \right. \\ &\times \left. \left[\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \frac{\partial \vec{E}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tau)}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\pm L} \mu_{nm}^*(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} \right] d\tau \right\} \mu_{nm}(x, y); \quad \{x, y\} \in \bar{R}_z, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Це точні локальні й нелокальні поглинаючі умови для поля $\vec{E}(g, t)$ на віртуальних межах $L_{\pm}$ області Q_L . Тут $J_m(x)$ – циліндричні функції Беселя, верхній символ $*$ означає комплексне спряження, $\vec{W}_E(x, y, t, \varphi)$ – деяка допоміжна функція, а $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ – числовий параметр.

Очевидно, що саме таким умовам на межах $L_{\pm}$ задовольняє також поле $\vec{H}(g, t)$ імпульсних хвиль $\vec{U}(g, t) = \{\vec{E}(g, t), \vec{H}(g, t)\}$, що йдуть в області А та В. Пари нелокальних або локальних умов для полів $\vec{E}(g, t)$ та $\vec{H}(g, t)$ скорочують область аналізу (простір розрахунку) задачі (2.12) до обмеженої частини Q_L каналу Флоке R, що містить всі його неоднорідності й джерела, які збурюють двовимірно-періодичну структуру.

Припустимо, що до джерел $\vec{j}(g, t)$, $\vec{\varphi}_E(g)$ та $\vec{\varphi}_H(g)$ задачі (2.12) додаються джерела $\vec{j}^A(g, t)$, $\vec{\varphi}_E^A(g)$ та $\vec{\varphi}_H^A(g)$, що розташовані в області відбиття А. Такі джерела породжують тут імпульсну хвилю $\vec{U}^i(g, t) = \{\vec{E}^i(g, t), \vec{H}^i(g, t)\}$, що набігає в моменти часу $t > 0$ на віртуальну межу L_+ , а потім – і на ґратку. Вважаємо, що поле хвилі $\vec{U}^i(g, t)$ є відмінним від нуля тільки в області А. Оскільки умови (2.17) та (2.18) залишаються в силі для будь-яких імпульсних хвиль, що йдуть через межі $L_{\pm}$ в напрямках $z = \pm\infty$ [1, 32], то визначення повного поля $\{\vec{E}(g, t), \vec{H}(g, t)\}$, що формується періодичною структурою, зводиться до розв'язку початково-крайової задачі (2.12) в області Q_L , на межі L_- якої ставляться умови типу (2.18) або (2.17), а на межі L_+ – умови типу

$$\begin{aligned} \vec{E}^s(x, y, L, t) = & - \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \mu_{nm}(x, y) \left\{ \int_0^t J_0[\lambda_{nm}(t-\tau)] \times \right. \\ & \times \left[\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \frac{\partial \vec{E}^s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tau)}{\partial \tilde{z}} \bigg|_{\tilde{z}=L} \mu_{nm}^*(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} \right] \bigg\} d\tau; \quad \{x, y\} \in \bar{R}_z, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

або

$$\begin{aligned} \vec{E}^s(x, y, L, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial \vec{W}_E^+(x, y, t, \varphi)}{\partial t} d\varphi; \quad \{x, y\} \in \bar{R}_z, \quad t \geq 0; \\ \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sin^2 \varphi \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \vec{W}_E^+(x, y, t, \varphi) = - \frac{\partial \vec{E}^s(g, t)}{\partial z} \Big|_{z=L}; \\ &\{x, y\} \in R_z, \quad t > 0 \\ &\vec{W}_E^+(x, y, t, \varphi) \Big|_{t=0} = \frac{\partial \vec{W}_E^+(x, y, t, \varphi)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0; \quad \{x, y\} \in \bar{R}_z \\ &D[\vec{W}_E^+](l_x, y) = e^{2\pi i \Phi_x} D[\vec{W}_E^+](0, y); \quad 0 \leq y \leq l_y, \\ &D[\vec{W}_E^+](x, l_y) = e^{2\pi i \Phi_y} D[\vec{W}_E^+](x, 0); \quad 0 \leq x \leq l_x; \quad t \geq 0. \end{aligned} \right. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Тут $\vec{U}^s(g, t) = \{\vec{E}^s(g, t), \vec{H}^s(g, t)\}$, $\vec{U}^s(g, t) = \vec{U}(g, t) - \vec{U}^i(g, t)$ ($g \in A$, $t > 0$) – це імпульсна хвиля, що рушить в напрямку $z = +\infty$. Вона породжується набіжною хвилею $\vec{U}^i(g, t)$ («відбиття» від віртуальної межі L_+) й джерелами $\vec{j}(g, t)$, $\vec{\phi}_E(g)$ та $\vec{\phi}_H(g)$.

Додавання умов типу (2.19) або (2.20) в початково-крайову задачу (2.12) дозволяє скоротити її область аналізу до обмеженої частини каналу Флоке Q_L . Так відкрита задача зводиться до еквівалентної закритої задачі, яка може бути ефективно розв'язана чисельно методом кінцевих різниць в часовій області [45].

2.4 Властивості нестационарних полів у прямокутному каналі Флоке

Для реалізації обчислювальних схем, до яких призводить використання умов типу (2.19) або (2.20), необхідна інформація про значення функції $\vec{U}^i(g, t)$, $t \in [0, T]$ та її похідну за нормаллю на віртуальній межі L_+

(см. рис. 2.2). У разі, коли хвиля $\vec{U}^i(g, t)$ породжується заданою системою джерел $\vec{j}^A(g, t)$, $\vec{\varphi}_E^A(g)$, отримання такої інформації зводиться до розв'язку таких початково-крайових задач про поширення збурення в регулярному порожньому каналі Флоке $\mathbf{R}$:

$$\left\{ \begin{aligned} \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right] \begin{Bmatrix} \vec{E}^i \\ \vec{H}^i \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \eta_0 \partial \vec{j}^A / \partial t + \varepsilon_0^{-1} \text{grad } \rho_2^A \\ -\text{rot } \vec{j}^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_E^A \\ \vec{F}_H^A \end{Bmatrix}; \quad g = \{x, y, z\} \in \mathbf{R}, \quad t > 0 \\ \left\{ \begin{aligned} \partial \vec{E}^i(g, t) / \partial t \Big|_{t=0} &= \eta_0 \text{rot } \vec{H}^i(g, 0) \\ \partial \vec{H}^i(g, t) / \partial t \Big|_{t=0} &= -\eta_0^{-1} \text{rot } \vec{E}^i(g, 0) \end{aligned} \right\} &= \begin{Bmatrix} \vec{\psi}_E^A \\ \vec{\psi}_H^A \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \vec{E}^i(g, 0) \\ \vec{H}^i(g, 0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\varphi}_E^A \\ \vec{\varphi}_H^A \end{Bmatrix}; \quad g \in \bar{\mathbf{R}} \\ D[\vec{E}^i(\vec{H}^i)](l_x, y) &= e^{2\pi i \Phi_x} D[\vec{E}^i(\vec{H}^i)](0, y); \quad 0 \leq y \leq l_y, \\ D[\vec{E}^i(\vec{H}^i)](x, l_y) &= e^{2\pi i \Phi_y} D[\vec{E}^i(\vec{H}^i)](x, 0); \quad 0 \leq x \leq l_x; \quad t \geq 0. \end{aligned} \right. \quad (2.21)$$

Тут функція $\rho_2^A(g, t)$ відповідає об'ємній густині сторонніх електричних зарядів.

Визначимо спочатку поздовжні компоненти E_z^i та H_z^i поля $\{\vec{E}^i, \vec{H}^i\}$ в усіх точках g області $\mathbf{R}$, для всіх моментів часу спостереження $t > 0$. Для цього розглянемо скалярні початково-крайові задачі, що впливають з (2.21):

$$\left\{ \begin{aligned} \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right] \begin{Bmatrix} E_z^i \\ H_z^i \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_{z,E}^A \\ F_{z,H}^A \end{Bmatrix}; \quad g \in \mathbf{R}, \quad t > 0 \\ \begin{Bmatrix} E_z^i(g, 0) \\ H_z^i(g, 0) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varphi_{z,E}^A \\ \varphi_{z,H}^A \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \partial E_z^i(g, t) / \partial t \Big|_{t=0} \\ \partial H_z^i(g, t) / \partial t \Big|_{t=0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_{z,E}^A \\ \psi_{z,H}^A \end{Bmatrix}; \quad g \in \bar{\mathbf{R}} \\ D[E_z^i(H_z^i)](l_x, y) &= e^{2\pi i \Phi_x} D[E_z^i(H_z^i)](0, y); \quad 0 \leq y \leq l_y, \\ D[E_z^i(H_z^i)](x, l_y) &= e^{2\pi i \Phi_y} D[E_z^i(H_z^i)](x, 0); \quad 0 \leq x \leq l_x; \quad t \geq 0. \end{aligned} \right. \quad (2.22)$$

Розділимо в задачах (2.22) поперечні змінні x та y і зобразимо їхній розв'язок у вигляді

$$\begin{Bmatrix} E_z^i(g,t) \\ H_z^i(g,t) \end{Bmatrix} = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,t) \\ v_{nm(z,H)}(z,t) \end{Bmatrix} \mu_{nm}(x,y) \quad (2.23)$$

Визначення скалярних функцій $v_{nm(z,E)}(z,t)$ та $v_{nm(z,H)}(z,t)$ зводиться до обернення таких задач Коші для одновимірних рівнянь Клейна-Гордона:

$$\begin{cases} \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda_{nm}^2 \right] \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,t) \\ v_{nm(z,H)}(z,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{nm(z,E)}^A \\ F_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix}; \\ t > 0, \quad -\infty < z < \infty \\ \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,0) \\ v_{nm(z,H)}(z,0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{nm(z,E)}^A \\ \varphi_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,t) \\ v_{nm(z,H)}(z,t) \end{Bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{Bmatrix} \psi_{nm(z,E)}^A \\ \psi_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix}; \\ -\infty < z < \infty, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.24)$$

Тут $F_{nm(z,E)}^A$, $\varphi_{nm(z,E)}^A$, $\psi_{nm(z,E)}^A$ та $F_{nm(z,H)}^A$, $\varphi_{nm(z,H)}^A$, $\psi_{nm(z,H)}^A$ – амплітуди розкладу Фур'є функцій $F_{z,E}^A$, $\varphi_{z,E}^A$, $\psi_{z,E}^A$ та $F_{z,H}^A$, $\varphi_{z,H}^A$, $\psi_{z,H}^A$ в базисі $\{\mu_{nm}(x,y)\}$.

Продовжимо функції $v_{nm(z,E)}(z,t)$, $v_{nm(z,H)}(z,t)$ та $F_{nm(z,E)}^A$, $F_{nm(z,H)}^A$ нулем на півосі $t < 0$ й перейдемо до узагальненого формулювання задач Коші (2.24) [71]:

$$\begin{aligned} B(\lambda_{nm}) \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,t) \\ v_{nm(z,H)}(z,t) \end{Bmatrix} &\equiv \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda_{nm}^2 \right] \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,t) \\ v_{nm(z,H)}(z,t) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} F_{nm(z,E)}^A \\ F_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix} - \delta^{(1)}(t) \begin{Bmatrix} \varphi_{nm(z,E)}^A \\ \varphi_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix} - \delta(t) \begin{Bmatrix} \psi_{nm(z,E)}^A \\ \psi_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{nm(z,E)} \\ f_{nm(z,H)} \end{Bmatrix}; \\ &-\infty < z < \infty, \quad -\infty < t < \infty, \quad n, m = 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$

Розв'язки $v_{nm(z,E)}(z,t)$ та $v_{nm(z,H)}(z,t)$ рівнянь (2.25) побудуємо, спираючись на властивості фундаментального розв'язку $G(z,t,\lambda) = -(1/2) \chi(t-|z|) J_0(\lambda \sqrt{t^2 - z^2})$ оператора $B(\lambda)$ (див. [1, 32, 71]):

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,t) \\ v_{nm(z,H)}(z,t) \end{Bmatrix} &= G(z,t,\lambda_{nm}) * \begin{Bmatrix} f_{nm(z,E)} \\ f_{nm(z,H)} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{t-|z-\omega|} \int_{-\infty}^{\infty} J_0\left(\lambda_{nm} \sqrt{(t-\tau)^2 - (z-\omega)^2}\right) \times \right. \\ &\times \left. \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} F_{nm(z,E)}^A \\ F_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix} - \delta^{(1)}(t) \begin{Bmatrix} \varphi_{nm(z,E)}^A \\ \varphi_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix} - \delta(t) \begin{Bmatrix} \psi_{nm(z,E)}^A \\ \psi_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix} \end{pmatrix} d\omega d\tau \right]; \\ &-\infty < z < \infty, \quad t \geq 0, \quad n, m = 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (2.26)$$

Співвідношення (2.23) та (2.26) повністю визначають поздовжні компоненти поля $\{\vec{E}^i, \vec{H}^i\}$. Тут $\delta^{(m)}(t)$ – похідна порядку m дельта-функції Дірака $\delta(t)$, $\chi(t)$ – ступінчаста функція Хевісайда, $J_0(x)$ – функція Беселя.

Вийдемо тепер за межі обмеженої області в каналі Флоке $\mathbb{R}$, в якій зосереджені всі джерела, в область $G \subset \mathbb{R}$, де хвилі, які породжуються цими джерелами, поширюються вільно. Тут справедливі [1, 32, 73] зображення

$$\begin{cases} \vec{E}^i = \left(\frac{\partial^2 U^E}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U^H}{\partial y \partial t} \right) \vec{x} + \left(\frac{\partial^2 U^E}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 U^H}{\partial x \partial t} \right) \vec{y} + \left(\frac{\partial^2 U^E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U^H}{\partial t^2} \right) \vec{z}; \\ \eta_0 \vec{H}^i = \left(\frac{\partial^2 U^E}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 U^H}{\partial x \partial z} \right) \vec{x} + \left(-\frac{\partial^2 U^E}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 U^H}{\partial y \partial z} \right) \vec{y} + \left(\frac{\partial^2 U^H}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U^E}{\partial t^2} \right) \vec{z}, \end{cases} \quad (2.27)$$

В ЯКИХ

$$U^{E,H}(g,t) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} u_{nm}^{E,H}(z,t) \mu_{nm}(x,y). \quad (2.28)$$

Це скалярні функції Борґніса такі, що $[\Delta - \partial^2/\partial t^2][\partial U^{E,H}(g,t)/\partial t] = 0$. Співвідношення (2.23), (2.26)–(2.28) визначають поле $\{\vec{E}^i, \vec{H}^i\}$ у всіх точках g області G й для всіх моментів часу спостереження $t > 0$, якщо тільки $\lambda_{nm} \neq 0$ для всіх n та m . Дійсно, оскільки в момент часу $t = 0$ область G не була збурена, то $[\Delta - \partial^2/\partial t^2]U^{E,H} = 0$ ($g \in G$, $t > 0$). Далі з (2.27) та (2.28) отримуємо

$$E_z = \frac{\partial^2 U^E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U^E}{\partial t^2} = - \left(\frac{\partial^2 U^E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^E}{\partial y^2} \right) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \lambda_{nm}^2 u_{nm}^E \mu_{nm},$$

$$\eta_0 H_z = \frac{\partial^2 U^H}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U^H}{\partial t^2} = - \left(\frac{\partial^2 U^H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^H}{\partial y^2} \right) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \lambda_{nm}^2 u_{nm}^H \mu_{nm}$$

і, приймаючи до уваги (2.23),

$$u_{nm}^E(z,t) = (\lambda_{nm})^{-2} v_{nm(z,E)}(z,t), \quad u_n^H(z,t) = \eta_0 (\lambda_{nm})^{-2} v_{nm(z,H)}(z,t). \quad (2.29)$$

Функції $U^{E,H}(g,t)$ визначені, а разом з ними співвідношеннями (2.27) визначені й поперечні компоненти векторів напруженості поля $\{\vec{E}^i, \vec{H}^i\}$.

Ще один важливий висновок дозволяє зробити проведений аналіз: всі поля, що виникають в зонах відбиття (область А) та проходження (область В) періодичної структури, однозначно визначаються своїми повздовжніми (спрямованими уздовж осі z) компонентами, які можуть бути зображені в такому вигляді: в полі набіжної хвилі –

$$\begin{Bmatrix} E_z^i(g,t) \\ H_z^i(g,t) \end{Bmatrix} = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,t) \\ v_{nm(z,H)}(z,t) \end{Bmatrix} \mu_{nm}(x,y); \quad g \in \bar{A}, \quad t \geq 0; \quad (2.30)$$

в полі відбитої хвилі $\vec{U}^s(g,t)$, яке співпадає з повним полем $\vec{U}(g,t)$ у випадку

$$\vec{U}^i(g, t) \equiv 0, -$$

$$\left\{ \begin{matrix} E_z^s(g, t) & \text{або} & E_z(g, t) \\ H_z^s(g, t) & \text{або} & H_z(g, t) \end{matrix} \right\} = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} u_{nm(z, E)}^+(z, t) \\ u_{nm(z, H)}^+(z, t) \end{matrix} \right\} \mu_{nm}(x, y); \quad g \in \bar{A}, \quad t \geq 0; \quad (2.31)$$

в полі хвилі, що пройшла, яке співпадає з повним полем $\vec{U}(g, t)$, –

$$\left\{ \begin{matrix} E_z(g, t) \\ H_z(g, t) \end{matrix} \right\} = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} u_{nm(z, E)}^-(z, t) \\ u_{nm(z, H)}^-(z, t) \end{matrix} \right\} \mu_{nm}(x, y); \quad g \in \bar{B}, \quad t \geq 0. \quad (2.32)$$

Під час вивчення фізики процесів, що реалізуються в двовимірних періодичних структурах, й під час розв’язання різноманітних прикладних задач найчастіше розглядаються ситуації, в яких структура збуджується однією з парціальних складових TE - ($E_z^i(g, t) = 0$) або TM -хвилі ($H_z^i(g, t) = 0$). Нехай цій складовій відповідають номери p та q . Тоді

$$\vec{U}^i(g, t) = \vec{U}_{pq(H)}^i(g, t); H_z^i(g, t) = v_{pq(z, H)}(z, t) \mu_{pq}(x, y),$$

або

$$\vec{U}^i(g, t) = \vec{U}_{pq(E)}^i(g, t); E_z^i(g, t) = v_{pq(z, E)}(z, t) \mu_{pq}(x, y).$$

Збудження такого роду реалізується в моделях наступним чином. На межі L_+ задається часова функція $v_{pq(z, H)}(L, t)$ ($v_{pq(z, E)}(L, t)$), яка визначає смугу хвильових чисел (частот) $k = 2\pi/\lambda$, зайняту імпульсом $\vec{U}^i(g, t)$, тобто інтервал

$[0 \leq K_1, K_2 < \infty]$ такий, що для всіх $k \in [K_1, K_2]$ відносна величина

$$\gamma = \frac{\left| \tilde{v}_{pq(z, H \text{ або } E)}(L, k) \right|}{\max_{k \in [K_1, K_2]} \left| \tilde{v}_{pq(z, H \text{ або } E)}(L, k) \right|}$$

модулів спектральних амплітуд $\tilde{v}_{pq(z, H \text{ або } E)}(L, k)$ імпульсу $v_{pq(z, H \text{ або } E)}(L, t)$ не опускається нижче якогось певного рівня $\gamma = \gamma_0$. Тут λ – довжина хвилі у вільному просторі, а всі спектральні характеристики $\tilde{f}(k)$ ми отримуємо з часових характеристик $f(t)$, використовуючи інтегральне перетворення Лапласа

$$\tilde{f}(k) = \int_0^\infty f(t) e^{ikt} dt \leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \tilde{f}(k) e^{-ikt} dk; \quad \text{Im } k \geq \alpha \geq 0.$$

Для числової реалізації умов типу (2.19) та (2.20), так само як і для розрахунку просторово-часових амплітуд поперечних компонент поля хвилі $\vec{U}^i(g, t)$ в перерізі $z = L$ каналу Флоке (формули (2.27), (2.29)), необхідно визначити функцію $\partial(v_{pq(z, H \text{ або } E)}(z, t)) / \partial z \Big|_{z=L}$. Зробити це, не порушуючи принципу причинності, можна, використовуючи співвідношення [32]

$$\vec{v}_{pq(H \text{ або } E)}(L, t) = \int_0^t J_0[\lambda_{pq}(t - \tau)] \frac{\partial(\vec{v}_{pq(H \text{ або } E)}(z, t))}{\partial z} \Big|_{z=L} d\tau; \quad t \geq 0 \quad (2.33)$$

(див. також формулу (2.16)), яке є справедливим для всіх амплітуд імпульсної хвилі $\vec{U}^i(g, t)$, яка приходить на ґратку з області А.

2.5 Багатошарові структури. Операторний метод

2.5.1 Еволюційний базис сигналу і транспортні оператори

Помістимо довільну двовимірну-періодичну ґратку скінченної товщини між двома діелектричними півпросторами $z_1 = z - L > 0$ (тут $\varepsilon = \varepsilon_1$) та $z_2 = -z - L > 0$ (тут $\varepsilon = \varepsilon_2$). З кожним з цих півпросторів зв'яжемо локальну систему координат $g_j = \{x_j, y_j, z_j\}$ (рис. 2.3).

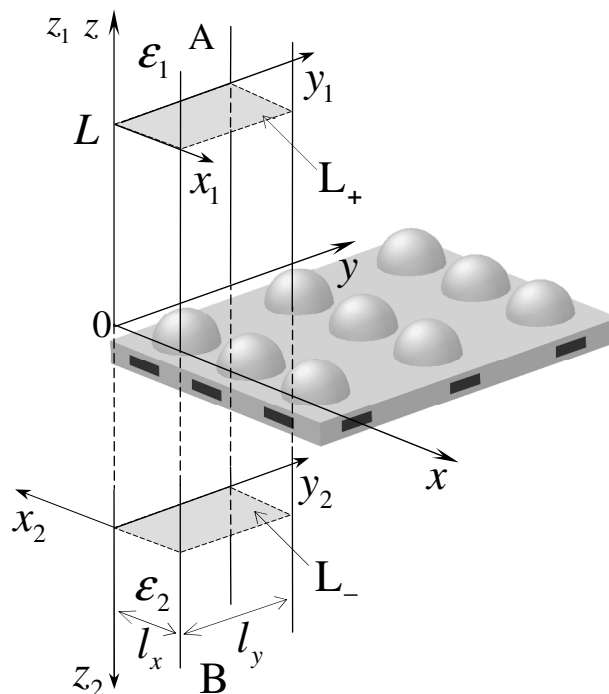


Рисунок 2.3 – Ґратка між двома діелектричними півпросторами

Припустимо, що джерела, що розташовані досить далеко в області А верхнього півпростору, породжують первинну хвилю $\vec{U}_1^i(g, t) = \{\vec{E}_1^i(g, t), \vec{H}_1^i(g, t)\}$, що падає на віртуальну межу L_+ (тут $z_1 = 0$). Позначимо через $\vec{U}_j^s(g, t) = \{\vec{E}_j^s(g, t), \vec{H}_j^s(g, t)\}$ поля, що збуджуються набіжною хвилею $\vec{U}_1^i(g, t)$ в областях А (тут повне поле

$\vec{U}(g, t) = \{\vec{E}(g, t), \vec{H}(g, t)\} = \vec{U}_1^s(g, t) + \vec{U}_1^i(g, t)$ та В (тут $\vec{U}(g, t) = \vec{U}_2^s(g, t)$). У підрозділі 2.4 ми показали, що всі поля, які розглядаються, однозначно визначаються своїми поздовжніми компонентами, які можуть бути зображені, наприклад, так:

$$\begin{Bmatrix} E_z^i(g, t) \\ H_z^i(g, t) \end{Bmatrix} = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} v_{nm(1, E)}(z_1, t) \\ v_{nm(1, H)}(z_1, t) \end{Bmatrix} \mu_{nm}(x, y); \quad z_1 \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (2.34)$$

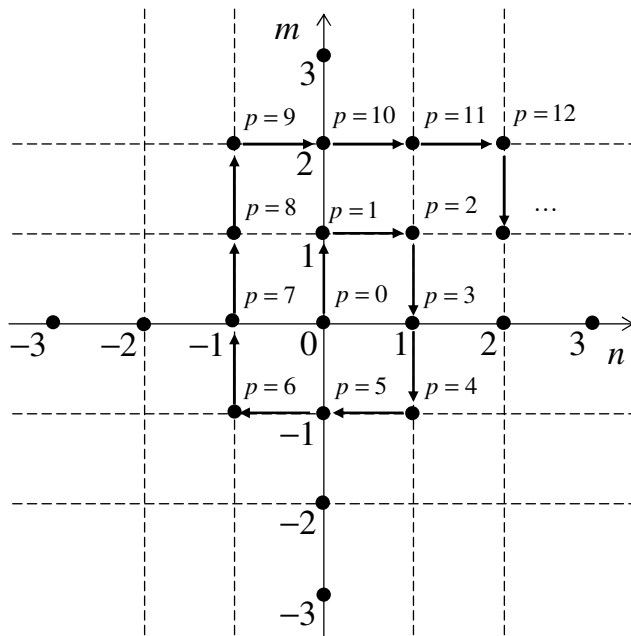
$$\begin{Bmatrix} E_z^s(g, t) \\ H_z^s(g, t) \end{Bmatrix} = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{nm(j, E)}(z_j, t) \\ u_{nm(j, H)}(z_j, t) \end{Bmatrix} \mu_{nm}(x, y); \quad z_j \geq 0, \quad t \geq 0, \quad j=1, 2 \quad (2.35)$$

(див. також формули (2.30) – (2.32)). Тут, як і раніше, $\{\mu_{nm}(x, y)\}_{n, m=-\infty}^{\infty}$ – повна (в просторі $L_2(\mathbb{R}_z)$) ортонормована система власних поперечних функцій каналу Флоке $\mathbb{R}$ (див. підрозділ 2.3), а просторово-часові амплітуди $u_{nm(j, E)}(z_j, t)$ та $u_{nm(j, H)}(z_j, t)$ визначаються розв’язками таких задач (див. також задачу (2.15)) для одновимірного рівняння Клейна-Гордона:

$$\begin{cases} \left[-\varepsilon_j \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} - \lambda_{nm}^2 \right] u_{nm(j, E \text{ or } H)}(z_j, t) = 0; & t > 0 \\ u_{nm(j, E \text{ або } H)}(z_j, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_{nm(j, E \text{ або } H)}(z_j, t) \Big|_{t=0} = 0 \\ z_j \geq 0, \quad j=1, 2, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}; \quad (2.36)$$

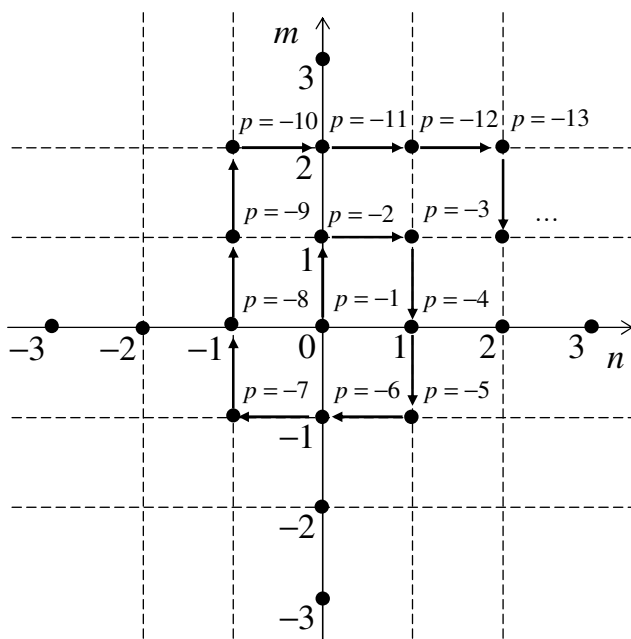
Складемо з функцій $v_{nm(1, E)}(z_1, t)$, $v_{nm(1, H)}(z_1, t)$, $u_{nm(j, E)}(z_j, t)$, $u_{nm(j, H)}(z_j, t)$ та власних чисел λ_{nm} ($n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) системи $v_{(1)}(z_1, t) = \{v_{p(1)}(z_1, t)\}_{p=-\infty}^{\infty}$,

$u_{(j)}(z_j, t) = \left\{ u_{p(j)}(z_j, t) \right\}_{p=-\infty}^{\infty}$, та $\{\lambda_p\}_{p=-\infty}^{\infty}$, номери елементів яких визначаються відповідно до правил, що зображені на рис. 2.4.



$$\begin{aligned}
 & p = 0, 1, 2, \dots \\
 & m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\
 & \lambda_{n,m} \rightarrow \lambda_p \\
 & v_{nm(1,E)}, u_{nm(j,E)} \rightarrow v_{p(1)}, u_{p(j)}
 \end{aligned}$$

(a)



$$\begin{aligned}
 & p = -1, -2, -3, \dots \\
 & m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\
 & \lambda_{n,m} \rightarrow \lambda_p \\
 & v_{nm(1,H)}, u_{nm(j,H)} \rightarrow v_{p(1)}, u_{p(j)}
 \end{aligned}$$

(б)

Рисунок 2.4 – Побудова систем елементів $v_{p(1)}$, $u_{p(j)}$ та λ_p ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) з

систем величин $v_{nm(1,E)}$, $u_{nm(j,E)}$, $v_{nm(1,H)}$, $u_{nm(j,H)}$ та λ_{nm} ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

(а) $p = 0, 1, 2, \dots$; (б) $p = -1, -2, -3, \dots$

Системи $v_{(1)}(z_1, t)$ та $u_{(j)}(z_j, t)$ назовемо еволюційними базисами сигналів $\vec{U}_1^i(g, t)$ та $\vec{U}_j^s(g, t)$. Вони повно й однозначно описують трансформацію відповідних несинусоїдних хвиль в регулярних частинах А та В каналу Флоке, що заповнені діелектриком з проникністю ε_1 та ε_2 .

Введемо співвідношеннями

$$\begin{aligned} u_{p(j)}'(0, t) &\equiv \left. \frac{\partial}{\partial z_j} u_{p(j)}(z_j, t) \right|_{z_j=0} = \\ &= \int_0^t \sum_{q=-\infty}^{\infty} [S_{pq}^{AA}(t-\tau) \delta_j^1 + S_{pq}^{BA}(t-\tau) \delta_j^2] v_{q(1)}(0, \tau) d\tau; \\ t &\geq 0, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$u_{(j)}'(0, t) = \left\{ u_{p(j)}'(0, t) \right\}_p = [S^{AA} \delta_j^1 + S^{BA} \delta_j^2] [v_{(1)}(0, \tau)]; \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2 \quad (2.38)$$

граничні (на границях $z_j = 0$) оператори перетворення S^{AA} та S^{BA} еволюційного базису $v_{(1)}(z_1, t)$ хвилі $\vec{U}_1^i(g, t)$, що приходить із області А. Тут δ_m^n – символ Кронекера, елементи S_{nm}^{XY} оператора S^{XY} задають просторово-часовий розподіл енергії, що приходить із області Y хвилі за областями (з області Y в область X) і за модами (від моди з номером m до моди з номером n).

Очевидно, що оператори S^{AA} та S^{BA} , діючі в просторі еволюційних базисів сигналів, є характеристиками власне періодичної структури, розміщеної між двома діелектричними півпросторами. Вони підсумовують відгук структури на елементарні збурення, з яких може бути зібрана будь-яка хвиля $\vec{U}_1^i(g, t)$, що падає. Так, для $v_{q(1)}(0, t) = \delta_q^r \delta(t - \eta)$, де r – ціле та $\eta > 0$, можна отримати $u_{p(1)}'(0, t) = S_{pr}^{AA}(t - \eta)$ та $u_{p(2)}'(0, t) = S_{pr}^{BA}(t - \eta)$. Ми використовуємо

цей приклад абстрактного сигналу для того, щоб показати, як у полі, яке формується ґраткою, виділити «чисті» компоненти $S_{pr}^{AA}(t-\tau)$ та $S_{pr}^{BA}(t-\tau)$ граничних операторів перетворення.

Оператори S^{AA} та S^{BA} визначають всі особливості перехідних процесів на верхній та нижній межах шару, що містить ґратку. Вторинні хвилі, що йдуть від цих меж, поширюються в регулярних частинах каналу Флоке А, В вільно, але при цьому теж деформуються. Просторово-часові амплітуди $u_{p(j)}(z_j, t)$ парціальних складових цих хвиль (елементи еволюційних базисів сигналів $\vec{U}_j^s(g, t)$) змінюються по-різному для різних значень p та j . Відстежити ці зміни на будь-якому кінцевому відрізку частини А та В каналу Флоке можна за допомогою діагональних транспортних операторів $Z_{0 \rightarrow z_1}^A$ та $Z_{0 \rightarrow z_2}^B$, що діють за правилом

$$u_{(j)}(z_j, t) = \{u_{p(j)}(z_j, t)\} = [Z_{0 \rightarrow z_1}^A \delta_j^1 + Z_{0 \rightarrow z_2}^B \delta_j^2] [u_{(j)}'(0, \tau)]; \quad j=1, 2. \quad (2.39)$$

Структура операторів, що задаються (2.39), деталізується формулою

$$u_{p(j)}(z_j, t) = -\frac{1}{\varepsilon_j} \int_0^{J_0} \left[\lambda_p \sqrt{\frac{(t-\tau)^2}{\varepsilon_j} - z_j^2} \right] \chi \left(\frac{t-\tau}{\sqrt{\varepsilon_j}} - z_j \right) u_{p(j)}'(0, \tau) d\tau; \quad (2.40)$$

$$t \geq 0, \quad z_j \geq 0, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 1, 2,$$

яка відображає загальні властивості розв'язків однорідних задач (2.36) на півосях $z_j \geq 0$, тобто розв'язків, які задовольняють нульовим початковим умовам та не містять компонент, що поширюються в напрямку спадаючих z_j . Техніка отримання (2.40) з (2.36) докладно наведена в [1, 32, 73].

2.5.2 Багатошарові структури. Рівняння операційного методу

Оператори S^{AA} та S^{BA} повністю визначають властивості ґратки, що збуджується з каналу А. Аналогічно (2.37) ми можемо визначити оператори перетворення S^{BB} та S^{AB} еволюційного базису $v_{(2)}(z_2, t) = \left\{ v_{p(2)}(z_2, t) \right\}_{p=-\infty}^{\infty}$ хвилі $\vec{U}_2^i(g, t) = \{ \vec{E}_2^i(g, t), \vec{H}_2^i(g, t) \}$, що приходить на межу $z_2 = 0$ з області В :

$$u_{p(j)}'(0, t) = \int_0^t \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[S_{pq}^{AB}(t-\tau) \delta_j^1 + S_{pq}^{BB}(t-\tau) \delta_j^2 \right] v_{q(2)}(0, \tau) d\tau; \quad (2.41)$$

$$t \geq 0, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 1, 2.$$

Побудуємо тепер алгоритм розрахунку характеристик розсіяння для структури, що складається з двох двовимірно-періодичних ґраток (див. рис. 2.5), для яких оператори S^{AA} , S^{BA} , S^{AB} та S^{BB} відомі.

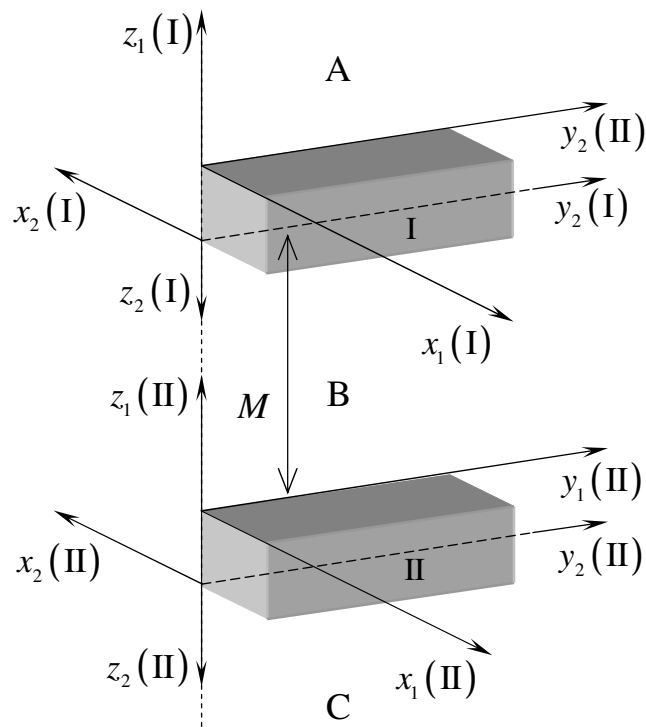


Рисунок 2.5 – Схематичне зображення двошарової періодичної структури

Напівпрозорі ґратки I та II розділені діелектричним шаром скінченної товщини M (тут $\varepsilon = \varepsilon_2(I) = \varepsilon_1(II)$) і розташовані між верхнім та нижнім діелектричними півпросторами, відносна діелектрична проникність яких дорівнює $\varepsilon_1(I)$ та $\varepsilon_2(II)$ відповідно.

Нехай імпульсна хвиля (2.34) падає на межу $z_1(I)=0$ з області A. Зберігаючи введені раніше позначення (очевидні зміни обумовлені наявністю двох різних ґраток I та II), зобразимо розв'язання відповідної початково-крайової задачі в регулярних областях A, B та C в такій символічній формі:

$$\begin{aligned} U(A) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[v_{p(1)}(z_1(I), t) + u_{p(1)}(z_1(I), t) \right] \mu_p(x, y), \\ U(B) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[u_{p(2)}(z_2(I), t) + u_{p(1)}(z_1(II), t) \right] \mu_p(x, y), \\ U(C) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} u_{p(2)}(z_2(II), t) \mu_p(x, y). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Перші групи доданків у (2.42) відповідають хвилям, що поширюються в напрямку області C, другі групи доданків відповідають хвилям, що біжать у напрямку області A (див. рис. 2.5). Система $\{\mu_p(x, y)\}_{p=-\infty}^{\infty}$ складається з функцій $\mu_{nm}(x, y)$, $(n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, а система $\{\lambda_p\}_{p=-\infty}^{\infty}$ – з величин λ_{nm} , $(n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ (див. рис. 2.4).

Вводячи позначення

$$u'_{(j)}(I) \equiv \frac{\partial}{\partial z_j(I)} u_{(j)}(z_j(I), t) \Big|_{z_j(I)=0}, \quad u_{(j)}(I) = \{u_{p(j)}(z_j(I), t)\} \Big|_{z_j(I)=0},$$

і т.д. і беручи до уваги формули (2.37)–(2.41), побудуємо систему операторних рівнянь:

$$\begin{cases} u_{(1)}'(I) = S^{AA}(I)[v_{(1)}(I)] + S^{AB}(I)Z_{z_1(II)=0 \rightarrow M}^B[u_{(1)}'(II)] \\ u_{(2)}'(I) = S^{BA}(I)[v_{(1)}(I)] + S^{BB}(I)Z_{z_1(II)=0 \rightarrow M}^B[u_{(1)}'(II)] \\ u_{(1)}'(II) = S^{BB}(II)Z_{z_2(I)=0 \rightarrow M}^B[u_{(2)}'(I)] \\ u_{(2)}'(II) = S^{CB}(II)Z_{z_2(I)=0 \rightarrow M}^B[u_{(2)}'(I)] \end{cases} \quad (2.43)$$

Рівняння (2.43) унаочнюють формування відгуку складної структури на збудження сигналом $\vec{U}_1^i(g, t)$ з еволюційним базисом $v_{(1)}(z_1(I), t) = \{v_{p(1)}(z_1(I), t)\}_{p=-\infty}^{\infty}$ (або просто $v_{(1)}(I)$). Так, наприклад, перше рівняння можна прочитати в такий спосіб. Сигнал $u_{(1)}(I)$ (вторинне поле в області А) являє собою суму двох сигналів, перший з яких – це результат відбиття набіжного сигналу $v_{(1)}(I)$ ґраткою І, а другий визначається деформованим у результаті проходження скрізь область В і цю ґратку сигналом $u_{(1)}(II)$.

Методом виключення система (2.43) зводиться до операторного рівняння другого роду

$$u_{(2)}'(I) = S^{BA}(I)[v_{(1)}(I)] + S^{BB}(I)Z_{z_1(II)=0 \rightarrow M}^B S^{BB}(II)Z_{z_2(I)=0 \rightarrow M}^B[u_{(2)}'(I)] \quad (2.44)$$

і низки простих формул для обчислення компонент поля у всіх областях двошарової структури. Час спостереження t для невідомої функції $u_{(2)}'(I)$ з лівої частини рівняння (2.44) строго більше будь-якого часу τ для функції $u_{(2)}'(I)$ в правій частині рівняння (в силу обмеженості швидкості поширення збурень). Тому рівняння (2.44) може бути обернене явно в межах стандартної схеми послідовного просування за часовими шарами. Після реалізації цієї

схеми й обчислення граничних операторів із використанням (2.37), (2.41), двошарова структура може бути переведена в розряд «елементарних» для розрахунку більш складних структур, що складаються з більшого числа шарів.

2.6 Властивості стаціонарних полів у прямокутному каналі Флоке

2.6.1 Збудження TM -хвилею

Нехай ґратка збуджується з області A імпульсною TM -хвилею $\vec{U}^i(g, t) = \vec{U}_{pq(E)}^i(g, t): E_z^i(g, t) = v_{pq(z, E)}(z, t) \mu_{pq}(x, y)$ та джерела $\vec{j}(g, t)$, $\vec{\phi}_E(g)$ і $\vec{\phi}_H(g)$ в області Q_L відсутні. Вторинне поле, що виникає в областях A та B , повністю визначається своїми поздовжніми компонентами. Їх можна зобразити у вигляді (2.31), (2.32). Задамо поля $\{\tilde{\vec{E}}(g, k), \tilde{\vec{H}}(g, k)\}$, що встановилися (використовуємо перетворення Лапласа з підрозділу 2.4) і які відповідають імпульсним полям $\{\vec{E}^i, \vec{H}^i\}$, $\{\vec{E}^s, \vec{H}^s\}$ в області A та імпульсному полю $\{\vec{E}, \vec{H}\}$ в області B , їхніми поздовжніми компонентами

$$\begin{cases} \tilde{E}_z^i(g, k) \\ \tilde{H}_z^i(g, k) \end{cases} = \begin{cases} \tilde{v}_{pq(z, E)}(k) \\ 0 \end{cases} e^{-i\Gamma_{pq}(z-L)} \mu_{pq}(x, y); \quad g \in \bar{A}, \quad (2.45)$$

$$\begin{cases} \tilde{E}_z^s(g, k) \\ \tilde{H}_z^s(g, k) \end{cases} = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \begin{cases} \tilde{u}_{nm(z, E)}^+(k) \\ \tilde{u}_{nm(z, H)}^+(k) \end{cases} e^{i\Gamma_{nm}(z-L)} \mu_{nm}(x, y); \quad g \in \bar{A}, \quad (2.46)$$

$$\begin{cases} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{cases} = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \begin{cases} \tilde{u}_{nm(z, E)}^-(k) \\ \tilde{u}_{nm(z, H)}^-(k) \end{cases} e^{-i\Gamma_{nm}(z+L)} \mu_{nm}(x, y); \quad g \in \bar{B}. \quad (2.47)$$

Тут $\tilde{v}_{pq(z, E)}(k) \leftrightarrow v_{pq(z, E)}(L, t)$, $\tilde{u}_{nm(z, E \text{ або } H)}^\pm(k) \leftrightarrow u_{nm(z, E \text{ або } H)}^\pm(\pm L, t)$ та

$$\Gamma_{nm} = (k^2 - \lambda_{nm}^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Re} \Gamma_n \operatorname{Re} k \geq 0, \quad \operatorname{Im} \Gamma_n \geq 0 \quad [3].$$

Амплітуди $\tilde{u}_{nm(z,E \text{ або } H)}^\pm(k)$ формують систему так званих коефіцієнтів розсіяння ґратки: систему коефіцієнтів відбиття

$$R_{pq(E)}^{nm(H)} = \frac{\tilde{u}_{nm(z,H)}^+(k)}{\tilde{v}_{pq(z,E)}(k)}, \quad R_{pq(E)}^{nm(E)} = \frac{\tilde{u}_{nm(z,E)}^+(k)}{\tilde{v}_{pq(z,E)}(k)}; \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.48)$$

які характеризують ефективність перетворення pq -ї гармоніки монохроматичної TM -хвилі в nm -ї гармоніки вторинного поля $\{\tilde{E}^s, \tilde{H}^s\}$ в зоні відбиття ґратки, та систему коефіцієнтів проходження

$$T_{pq(E)}^{nm(H)} = \frac{\tilde{u}_{nm(z,H)}^-(k)}{\tilde{v}_{pq(z,E)}(k)}, \quad T_{pq(E)}^{nm(E)} = \frac{\tilde{u}_{nm(z,E)}^-(k)}{\tilde{v}_{pq(z,E)}(k)}; \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.49)$$

які визначають ефективність збудження гармонік вторинного поля в області В.

Ці коефіцієнти пов'язані співвідношеннями балансу енергії

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nm}^2} \left[\left(\left| R_{pq(E)}^{nm(E)} \right|^2 + \left| T_{pq(E)}^{nm(E)} \right|^2 \right) \pm \eta_0^2 \left(\left| R_{pq(E)}^{nm(H)} \right|^2 + \left| T_{pq(E)}^{nm(H)} \right|^2 \right) \right] \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} \Gamma_{nm} \\ \operatorname{Im} \Gamma_{nm} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_{pq}^2} \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} \Gamma_{pq} + 2 \operatorname{Im} \Gamma_{pq} \operatorname{Im} R_{pq(E)}^{pq(E)} \\ \operatorname{Im} \Gamma_{pq} - 2 \operatorname{Re} \Gamma_{pq} \operatorname{Im} R_{pq(E)}^{pq(E)} \end{Bmatrix} \mp \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix}; \quad p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$W_1 = \frac{\varepsilon_0 \eta_0}{k} \int_{Q_L} \sigma(g, k) \left| \tilde{E}(g, k) \right|^2 dg, \quad W_2 = \frac{\varepsilon_0 \eta_0}{k} \int_{Q_L} \sigma(g, k) \left| \tilde{E}(g, k) \right|^2 dg, \quad (2.51)$$

які впливають з інтегральної форми теореми про комплексну потужність (теореми Пойнтінга) [25, 70]

$$\oint_{S_L} \left(\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^* \right) \cdot \vec{ds} = \int_{Q_L} \operatorname{div} \left(\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^* \right) dg = ik\eta_0 \int_{Q_L} \mu \left| \tilde{\vec{H}} \right|^2 dg - \frac{ik}{\eta_0} \int_{Q_L} \varepsilon \left| \tilde{\vec{E}} \right|^2 dg - \int_{Q_L} \sigma \left| \tilde{\vec{E}} \right|^2 dg, \quad (2.52)$$

Тут $\varepsilon(g, k) - 1 = \tilde{\chi}_\varepsilon(g, k) \leftrightarrow \chi_\varepsilon(g, t)$, $\mu(g, k) - 1 = \tilde{\chi}_\mu(g, k) \leftrightarrow \chi_\mu(g, t)$,
 $\sigma(g, k) = \tilde{\chi}_\sigma(g, k) \leftrightarrow \chi_\sigma(g, t)$, $\vec{ds}$ – векторний елемент поверхні S_L , що обмежує область Q_L . При виведенні співвідношень (2.50)–(2.52) ми виходили з крайової задачі, яка визначає дифракційні характеристики періодичної структури, розташованої в полі плоскої TM -хвилі
 $\tilde{U}_{pq(E)}^i(g, k) : \tilde{E}_z^i(g, k) = \exp[-i\Gamma_{pq}(z-L)] \mu_{pq}(x, y) :$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_0 \operatorname{rot} \tilde{\vec{H}}(g, k) = -ik\bar{\varepsilon}(g, k) \tilde{\vec{E}}(g, k), \quad \operatorname{rot} \tilde{\vec{E}}(g, k) = ik\eta_0 \mu(g, k) \tilde{\vec{H}}(g, k); \quad g \in Q_L \\ D \left[\tilde{\vec{E}} \left(\tilde{\vec{H}} \right) \right] (l_x, y) = e^{2\pi i \Phi_x} D \left[\tilde{\vec{E}} \left(\tilde{\vec{H}} \right) \right] (0, y); \quad 0 \leq y \leq l_y, \\ D \left[\tilde{\vec{E}} \left(\tilde{\vec{H}} \right) \right] (x, l_y) = e^{2\pi i \Phi_y} D \left[\tilde{\vec{E}} \left(\tilde{\vec{H}} \right) \right] (x, 0); \quad 0 \leq x \leq l_x; \quad |z| < L \\ \tilde{E}_{tg}(g, k) \Big|_{g \in S} = 0, \quad \tilde{H}_{nr}(g, k) \Big|_{g \in S} = 0, \end{array} \right. \quad (2.53)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right\} e^{-i\Gamma_{pq}(z-L)} \mu_{pq}(x, y) + \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} R_{pq(E)}^{nm(E)}(k) \\ R_{pq(E)}^{nm(H)}(k) \end{array} \right\} e^{i\Gamma_{nm}(z-L)} \mu_{nm}(x, y); \quad g \in \bar{A}, \quad (2.54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{array} \right\} = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} T_{pq(E)}^{nm(E)}(k) \\ T_{pq(E)}^{nm(H)}(k) \end{array} \right\} e^{-i\Gamma_{nm}(z+L)} \mu_{nm}(x, y); \quad g \in \bar{B}. \quad (2.55)$$

При побудові (2.50) були використані також співвідношення, які легко

перевіряються, що зв'язують поперечні компоненти поля $\{\tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{H}}\}$ власної монохроматичної хвилі каналу Флоке

$$\tilde{U}(g, k): \tilde{E}_z(g, k) = A e^{\pm i \Gamma z} \mu(x, y) \quad \text{і} \quad \tilde{H}_z(g, k) = B e^{\pm i \Gamma z} \mu(x, y) \quad (2.56)$$

(індекси n, m тут випущені) з його поздовжніми компонентами:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x &= -\frac{\beta k \eta_0}{\lambda^2} \tilde{H}_z \mp \frac{\alpha \Gamma}{\lambda^2} \tilde{E}_z, & \tilde{E}_y &= \frac{\alpha k \eta_0}{\lambda^2} \tilde{H}_z \mp \frac{\beta \Gamma}{\lambda^2} \tilde{E}_z, \\ \tilde{H}_x &= \mp \frac{\alpha \Gamma}{\lambda^2} \tilde{H}_z + \frac{\beta k}{\eta_0 \lambda^2} \tilde{E}_z, & \tilde{H}_y &= \mp \frac{\beta \Gamma}{\lambda^2} \tilde{H}_z - \frac{\alpha k}{\eta_0 \lambda^2} \tilde{E}_z. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Тут $\bar{\varepsilon}(g, k) = \varepsilon(g, k) + i \eta_0 \sigma(g, k)/k$, $\Gamma = (k^2 - \lambda^2)^{1/2}$, $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Поля $\{\tilde{E}^{(1)}, \tilde{H}^{(1)}\}$ та $\{\tilde{E}^{(2)}, \tilde{H}^{(2)}\}$, що породжуються ґраткою й двома

плоскими TM -хвилями

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{pq(E)}^{i(1)}(g, k): \tilde{E}_z^{i(1)}(g, k) &= \exp[-i \Gamma_{pq}(\Phi_x, \Phi_y)(z - L)] \mu_{pq}(x, y, \Phi_x, \Phi_y) \quad i \\ \tilde{U}_{-r, -s(E)}^{i(2)}(g, k): \tilde{E}_z^{i(2)}(g, k) &= \exp[-i \Gamma_{-r, -s}(-\Phi_x, -\Phi_y)(z - L)] \mu_{-r, -s}(x, y, -\Phi_x, -\Phi_y), \end{aligned}$$

відповідно до леми Лоренца [70, 74, 75] задовольняють рівнянню

$$\oint_{S_L} \left(\left[\tilde{\vec{E}}^{(1)} \times \tilde{\vec{H}}^{(2)} \right] - \left[\tilde{\vec{E}}^{(2)} \times \tilde{\vec{H}}^{(1)} \right] \right) \cdot \vec{ds} = 0. \quad (2.58)$$

З (2.58), використовуючи зображення (2.54), (2.55) та (2.57), отримуємо

$$\frac{R_{pq(E)}^{rs(E)}(\Phi_x, \Phi_y) \lambda_{p,q}^2(\Phi_x, \Phi_y)}{\Gamma_{pq}(\Phi_x, \Phi_y)} = \frac{R_{-r,-s(E)}^{-p,-q(E)}(-\Phi_x, -\Phi_y) \lambda_{-r,-s}^2(-\Phi_x, -\Phi_y)}{\Gamma_{-r,-s}(-\Phi_x, -\Phi_y)}; \quad (2.59)$$

$$p, q, r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Це співвідношення взаємності, які відіграють важливу роль у фізичному аналізі розсіяння електромагнітних хвиль періодичними структурами, у тестуванні алгоритмів числового розв'язання крайових задач (2.53)–(2.55).

Нехай тепер так само, як і в розглянутому вище випадку,

$$\tilde{U}_{pq(E)}^{i(1)}(g, k): \tilde{E}_z^{i(1)}(g, k) = \exp\left[-i\Gamma_{pq}(\Phi_x, \Phi_y)(z - L)\right] \mu_{pq}(x, y, \Phi_x, \Phi_y) = \tilde{U}_{pq(E)}^{i(1)}(g, k, A)$$

(гратка збуджується з області А), а хвиля

$$\tilde{U}_{-r,-s(E)}^{i(2)}(g, k): \tilde{E}_z^{i(2)}(g, k, B) = \exp\left[i\Gamma_{-r,-s}(-\Phi_x, -\Phi_y)(z + L)\right] \times \mu_{-r,-s}(x, y, -\Phi_x, -\Phi_y)$$

приходить на гратку з області В. Ці дві хвилі також задовольняють рівнянню (2.58), звідки, із врахуванням (2.57), отримуємо

$$\frac{T_{pq(E)}^{rs(E)}(\Phi_x, \Phi_y, A) \lambda_{p,q}^2(\Phi_x, \Phi_y)}{\Gamma_{pq}(\Phi_x, \Phi_y)} = \frac{T_{-r,-s(E)}^{-p,-q(E)}(-\Phi_x, -\Phi_y, B) \lambda_{-r,-s}^2(-\Phi_x, -\Phi_y)}{\Gamma_{-r,-s}(-\Phi_x, -\Phi_y)}; \quad (2.60)$$

$$p, q, r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2.6.2 Збудження TE -хвилею

Нехай тепер гратка збуджується з області А імпульсною TE -хвилею $\vec{U}_{pq(H)}^i(g, t): H_z^i(g, t) = v_{pq(z,H)}(z, t) \mu_{pq}(x, y)$ та джерела $\vec{j}(g, t)$, $\vec{\varphi}_E(g)$ і $\vec{\varphi}_H(g)$ в області Q_L відсутні. Вторинне поле, що виникає в областях А та В, повністю визначається своїми поздовжніми компонентами. Їх ми зобразимо у вигляді

(2.31), (2.32). Поля $\{\tilde{\vec{E}}(g, k), \tilde{\vec{H}}(g, k)\}$, що встановилися і які відповідають імпульсним полям $\{\vec{E}^i, \vec{H}^i\}$, $\{\vec{E}^s, \vec{H}^s\}$ в області А та імпульсному полю $\{\vec{E}, \vec{H}\}$ в області В, задамо їхніми поздовжніми компонентами так само, як і у випадку ТМ -хвиль (див. формули (2.45)–(2.47)). Коефіцієнти розсіяння $R_{pq(H)}^{nm(E)}$, $R_{pq(H)}^{nm(H)}$, $T_{pq(H)}^{nm(E)}$ та $T_{pq(H)}^{nm(H)}$ введемо співвідношеннями типу (2.48), (2.49). Ці коефіцієнти визначаються з задач

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_0 \text{rot} \tilde{\vec{H}}(g, k) = -ik \tilde{\vec{E}}(g, k), \quad \text{rot} \tilde{\vec{E}}(g, k) = ik \eta_0 \mu(g, k) \tilde{\vec{H}}(g, k); \quad g \in Q_L \\ D \left[\tilde{\vec{E}} \left(\tilde{\vec{H}} \right) \right] (l_x, y) = e^{2\pi i \Phi_x} D \left[\tilde{\vec{E}} \left(\tilde{\vec{H}} \right) \right] (0, y); \quad 0 \leq y \leq l_y, \\ D \left[\tilde{\vec{E}} \left(\tilde{\vec{H}} \right) \right] (x, l_y) = e^{2\pi i \Phi_y} D \left[\tilde{\vec{E}} \left(\tilde{\vec{H}} \right) \right] (x, 0); \quad 0 \leq x \leq l_x; \quad |z| < L \\ \tilde{E}_{tg}(g, k) \Big|_{g \in S} = 0, \quad \tilde{H}_{nr}(g, k) \Big|_{g \in S} = 0, \end{array} \right. \quad (2.61)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right\} e^{-i\Gamma_{pq}(z-L)} \mu_{pq}(x, y) + \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} R_{pq(H)}^{nm(E)}(k) \\ R_{pq(H)}^{nm(H)}(k) \end{array} \right\} e^{i\Gamma_{nm}(z-L)} \mu_{nm}(x, y); \quad g \in \bar{A}, \quad (2.62)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{array} \right\} = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} T_{pq(H)}^{nm(E)}(k) \\ T_{pq(H)}^{nm(H)}(k) \end{array} \right\} e^{-i\Gamma_{nm}(z+L)} \mu_{nm}(x, y); \quad g \in \bar{B}, \quad (2.63)$$

аналогічних задачам (2.53)–(2.55), й задовольняють таким співвідношенням, що є наслідками теореми Пойнтінга та леми Лоренца:

$$\sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nm}^2} \left[\left(\left| R_{pq(H)}^{nm(H)} \right|^2 + \left| T_{pq(H)}^{nm(H)} \right|^2 \right) \pm \frac{1}{\eta_0^2} \left(\left| R_{pq(H)}^{nm(E)} \right|^2 + \left| T_{pq(H)}^{nm(E)} \right|^2 \right) \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \Gamma_{nm} \\ \text{Im} \Gamma_{nm} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{pq}^2} \left\{ \begin{aligned} &\text{Re} \Gamma_{pq} + 2 \text{Im} \Gamma_{pq} \text{Im} R_{pq(H)}^{pq(H)} \\ &\text{Im} \Gamma_{pq} - 2 \text{Re} \Gamma_{pq} \text{Im} R_{pq(H)}^{pq(H)} \end{aligned} \right\} - \frac{1}{\mu_0} \left\{ \begin{aligned} &W_1 \\ &W_2 \end{aligned} \right\}; \quad p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.64)$$

$$\frac{R_{pq(H)}^{rs(H)}(\Phi_x, \Phi_y) \lambda_{p,q}^2(\Phi_x, \Phi_y)}{\Gamma_{pq}(\Phi_x, \Phi_y)} = \frac{R_{-r,-s(H)}^{-p,-q(H)}(-\Phi_x, -\Phi_y) \lambda_{-r,-s}^2(-\Phi_x, -\Phi_y)}{\Gamma_{-r,-s}(-\Phi_x, -\Phi_y)}; \quad (2.65)$$

$$p, q, r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Співвідношення типу (2.60) в цьому випадку приймають форму

$$\frac{T_{pq(H)}^{rs(H)}(\Phi_x, \Phi_y, A) \lambda_{p,q}^2(\Phi_x, \Phi_y)}{\Gamma_{pq}(\Phi_x, \Phi_y)} = \frac{T_{-r,-s(H)}^{-p,-q(H)}(-\Phi_x, -\Phi_y, B) \lambda_{-r,-s}^2(-\Phi_x, -\Phi_y)}{\Gamma_{-r,-s}(-\Phi_x, -\Phi_y)}; \quad (2.66)$$

$$p, q, r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2.6.3 Загальні властивості вторинного поля ґратки

Нехай k – дійсний й додатний частотний параметр, а довільна напівпрозора ґратка (див. рис. 2.2) збуджується з області А однорідною TM - або TE -хвилею

$$\tilde{U}_{pq(E \text{ або } H)}^i(g, k): \{ \tilde{E}_z^i(g, k) \text{ або } \tilde{H}_z^i(g, k) \} = e^{-i\Gamma_{pq}(z-L)} \mu_{pq}(x, y); \quad p, q: \text{Im} \Gamma_{pq} = 0. \quad (2.67)$$

Складові з нескінченними рядами в (2.54), (2.55) та (2.62), (2.63) являють собою поздовжні компоненти nm -х дифракційних просторових гармонік вторинного (розсіяного) поля для областей А та В. Комплексні амплітуди $R_{pq(E \text{ або } H)}^{nm(E)}$, $R_{pq(E \text{ або } H)}^{nm(H)}$ і так далі є складними функціями параметрів k , Φ_x , Φ_y та інших геометричних й матеріальних параметрів ґратки. Кожна гармоніка, для якої

$\text{Im} \Gamma_{nm} = 0$ та $\text{Re} \Gamma_{nm} > 0$, є однорідною плоскою хвилею, що поширюється від ґратки в напрямку вектора $\vec{k}_{nm}$: $k_x = \alpha_n$, $k_y = \beta_m$, $k_z = \Gamma_{nm}$ (в області А; див. рис. 2.6) або $k_z = -\Gamma_{nm}$ (в області В). Частоти k : $\Gamma_{nm}(k) = 0$ ($k = k_{nm}^{\pm} = \pm |\lambda_{nm}|$), на яких просторові гармоніки (nm : $\text{Im} \Gamma_{nm} > 0$), що затухають, перетворюються в однорідні плоскі хвилі, що поширюються, називають зазвичай пороговими точками або точками ковзання [3, 20, 23-25]. Очевидно, що напрями векторів $\vec{k}_{nm}$ (напрями поширення однорідних гармонік вторинного поля) залежать від їхніх номерів nm і від значень k та $\vec{k}_{pq}^i$: $k_x^i = \alpha_p$, $k_y^i = \beta_q$, $k_z^i = -\Gamma_{pq}$ – напрямного вектора хвилі, що збуджує.

Згідно (2.50) та (2.64) величини

$$\begin{aligned} (WR)_{pq}^{nm} &= \left(\left| R_{pq(E)}^{nm(E)} \right|^2 + \eta_0^2 \left| R_{pq(E)}^{nm(H)} \right|^2 \right) \frac{\text{Re} \Gamma_{nm}}{\lambda_{nm}^2} \frac{\lambda_{pq}^2}{\Gamma_{pq}} = (WR)_{pq(E)}^{nm(E)} + (WR)_{pq(E)}^{nm(H)}, \\ (WT)_{pq}^{np} &= \left(\left| T_{pq(E)}^{nm(E)} \right|^2 + \eta_0^2 \left| T_{pq(E)}^{nm(H)} \right|^2 \right) \frac{\text{Re} \Gamma_{nm}}{\lambda_{nm}^2} \frac{\lambda_{pq}^2}{\Gamma_{pq}} = (WT)_{pq(E)}^{np(E)} + (WT)_{pq(E)}^{np(H)} \end{aligned} \quad (2.68)$$

(у випадку збудження TM -хвилею) і

$$\begin{aligned} (WR)_{pq}^{nm} &= \left(\left| R_{pq(H)}^{nm(H)} \right|^2 + \frac{1}{\eta_0^2} \left| R_{pq(H)}^{nm(E)} \right|^2 \right) \frac{\text{Re} \Gamma_{nm}}{\lambda_{nm}^2} \frac{\lambda_{pq}^2}{\Gamma_{pq}} = (WR)_{pq(H)}^{nm(H)} + (WR)_{pq(H)}^{nm(E)}, \\ (WT)_{pq}^{np} &= \left(\left| T_{pq(H)}^{nm(H)} \right|^2 + \frac{1}{\eta_0^2} \left| T_{pq(H)}^{nm(E)} \right|^2 \right) \frac{\text{Re} \Gamma_{nm}}{\lambda_{nm}^2} \frac{\lambda_{pq}^2}{\Gamma_{pq}} = (WT)_{pq(H)}^{nm(H)} + (WT)_{pq(H)}^{nm(E)} \end{aligned} \quad (2.69)$$

(у випадку збудження TE -хвилею) визначають енергетичне наповнення гармонік, тобто відносну частину енергії, яка спрямовується структурою у відповідний просторовий канал випромінювання. Канал, що відповідає nm -й гармоніці, будемо називати відкритим, якщо $\text{Im} \Gamma_{nm} = 0$. Режим, за якого відкрито тільки один канал для поширення просторових гармонік ($nm = pq$),

будемо називати одномодовим.

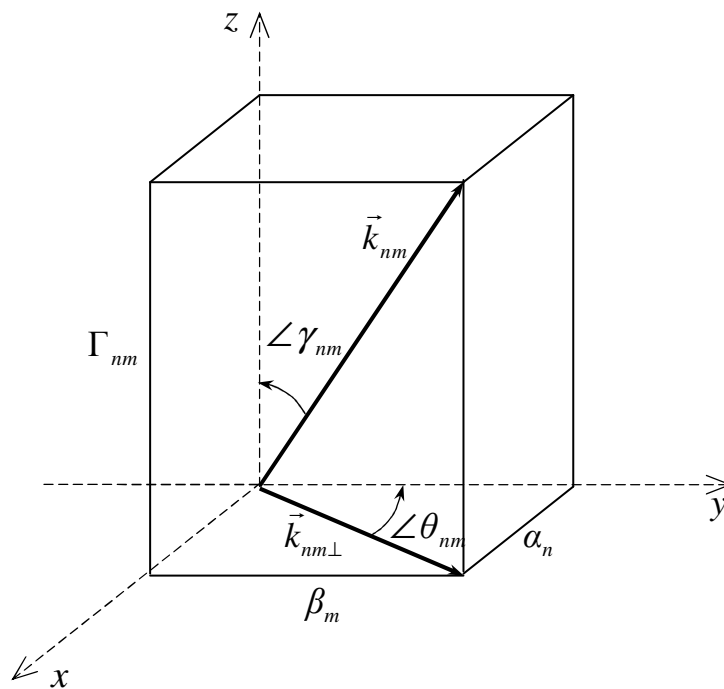


Рисунок 2.6 – До визначення дифракційних просторових гармонік вторинного поля періодичних структур

Оскільки $|\vec{k}_{pq}^i| = |\vec{k}_{nm}| = k$, то спрямувати nm -у гармоніку вторинного поля в зоні відбиття ґратки назустріч набіжній хвилі можна тільки в тому випадку, коли $\alpha_n = -\alpha_p$ та $\beta_m = -\beta_q$. Або, що те ж саме, у випадку, коли

$$n = -2\Phi_x - p \quad \text{і} \quad m = -2\Phi_y - q. \quad (2.70)$$

Реалізація такого режиму недзеркального відбиття називається автоколімацією.

Не всі амплітуди $R_{pq(E \text{ або } H)}^{nm(E)}$, $R_{pq(E \text{ або } H)}^{nm(H)}$ і т.д. однаково важливі для фізичного аналізу – в далекій зоні вторинне поле формується тільки гармоніками, що поширюються, з номерами nm такими, що $\text{Re } \Gamma_{nm} \geq 0$. Однак аналіз поля випромінювання в безпосередній близькості від ґратки вимагає урахування внесків також і хвиль, що загасають ($nm : \text{Im } \Gamma_{nm} > 0$). Більш того, в

деяких ситуаціях (наприклад, у режимі резонансу) цей внесок домінує [22, 24].

2.6.4 Найпростіші наслідки співвідношень взаємності та закону збереження енергії

Зупинимось на деяких наслідках, що випливають із співвідношень (2.50), (2.59), (2.60) та (2.64)–(2.66). Їх використання дозволяє контролювати результати числових експериментів і полегшує їхню фізичну інтерпретацію. У деяких випадках використання цих наслідків може істотно скоротити обсяг обчислень або ж звести початкову задачу до деякої іншої задачі, розв'язок якої або відомий, або такий, що його можна легко отримати. Нижче наведемо формулювання деяких з них, виходячи з результатів, отриманих у [75] для двовимірного випадку, і вважаючи, що $\varepsilon(g, k) \geq 0$, $\mu(g, k) \geq 0$ та $\sigma(g, k) \geq 0$.

- Верхні рядки в співвідношеннях (2.50) та (2.64) являють собою закон збереження енергії для гармонік, що поширюються. У випадку, коли $\text{Im } \Gamma_{pq} = 0$, енергія розсіяного поля очевидним чином пов'язана з енергією набіжної хвилі. Енергія набіжної хвилі $\tilde{U}_{pq(E \text{ або } H)}^i(g, k)$ частково поглинається ґраткою (якщо тільки $W_1 \neq 0$), а її решта розподіляється між просторовими TM - та TE -гармоніками, що поширюються в областях A та B (перевипромінюються в напрямках $z = \pm\infty$). У випадку падіння плоскої неоднорідної хвилі ($\text{Im } \Gamma_{pq} > 0$) загальна енергія (яка є перевипроміненою й поглиненою) визначається уявною частиною коефіцієнта відбиття $R_{pq(E \text{ або } H)}^{pq(E \text{ або } H)}$, який у даному випадку не може бути від'ємним.

- Співвідношення в нижніх рядках (2.50) та (2.64) обмежують величини $\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left| R_{pq(E)}^{nm(E)} \right|^2 \lambda_{nm}^{-2} \text{Im } \Gamma_{nm}$, $\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left| T_{pq(E)}^{nm(E)} \right|^2 \lambda_{nm}^{-2} \text{Im } \Gamma_{nm}$, і т.д., й визначають тим самим клас нескінченних послідовностей

$$\bar{l}_2 = \left\{ a = \{a_{nm}\}_{n,m=-\infty}^{\infty} : \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \frac{|a_{nm}|^2}{\sqrt{n^2 + m^2}} < \infty \right\}, \quad (2.71)$$

або енергетичний простір, якому повинні належати амплітуди гармонік розсіяного поля $R_{pq(E)}^{nm(E)}$, $T_{pq(E)}^{nm(E)}$ і т.д.

- З (2.59), (2.60), (2.65) та (2.66) випливає, що для всіх напівпрозорих й відбивальних ґраток справедливі рівності

$$\begin{aligned} (WR)_{00(E \text{ або } H)}^{00(E \text{ або } H)}(\Phi_x, \Phi_y) &= (WR)_{00(E \text{ або } H)}^{00(E \text{ або } H)}(-\Phi_x, -\Phi_y), \\ (WT)_{00(E \text{ або } H)}^{00(E \text{ або } H)}(\Phi_x, \Phi_y, A) &= (WT)_{00(E \text{ або } H)}^{00(E \text{ або } H)}(-\Phi_x, -\Phi_y, B). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Перше з цих співвідношень доводить, що ефективність перетворення TM - або TE -хвилі в дзеркально відбиту хвилю тієї ж поляризації не зміниться, якщо ґратку розгорнути в площині xOy навколо осі z на 180° . Не зміниться й ефективність перетворення в основну хвилю, що пройшла, тієї ж поляризації, якщо ґратку перевернути, обертаючи її навколо осі, що лежить в площині xOy і перпендикулярній вектору $\vec{k}_{00}$ (див. рис. 2.6).

- Якщо $r = s = p = q = 0$, то з (2.59), (2.60), (2.65) та (2.66) отримуємо також:

$$\begin{aligned} R_{00(E \text{ або } H)}^{00(E \text{ або } H)}(\Phi_x, \Phi_y) &= R_{00(E \text{ або } H)}^{00(E \text{ або } H)}(-\Phi_x, -\Phi_y), \\ T_{00(E \text{ або } H)}^{00(E \text{ або } H)}(\Phi_x, \Phi_y, A) &= T_{00(E \text{ або } H)}^{00(E \text{ або } H)}(-\Phi_x, -\Phi_y, B). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Це означає, що навіть якщо напівпрозора або відбивальна ґратка не має симетрії щодо будь-якої площини, коефіцієнти відбиття й проходження, що входять до (2.73), не залежатимуть від відповідних змін кута падіння хвилі, яка збуджує.

• Співвідношення (2.50) та (2.59) дозволяють сформулювати такі закономірності для теорії ідеальних ($\sigma(g, k) \equiv 0$) асиметричних відбивальних ґраток. Нехай параметри k , Φ_x і Φ_y є такими, що $\text{Re} \Gamma_{00}(\Phi_x, \Phi_y) > 0$ та $\text{Re} \Gamma_{nm}(\Phi_x, \Phi_y) = 0$; $n, m \neq 0$. Якщо набіжна хвиля є неоднорідною плоскою хвилею $\tilde{U}_{\pm p, \pm q(E)}^i(g, k, \pm \Phi_x, \pm \Phi_y)$, тоді

$$\begin{aligned} & \left(\left| R_{\pm p, \pm q(E)}^{00(E)}(\pm \Phi_x, \pm \Phi_y) \right|^2 + \eta_0^2 \left| R_{\pm p, \pm q(E)}^{00(H)}(\pm \Phi_x, \pm \Phi_y) \right|^2 \right) \times \frac{\text{Re} \Gamma_{00}(\pm \Phi_x, \pm \Phi_y)}{\lambda_{00}^2(\pm \Phi_x, \pm \Phi_y)} = \\ & = 2 \text{Im} R_{\pm p, \pm q(E)}^{\pm p, \pm q(E)}(\pm \Phi_x, \pm \Phi_y) \frac{\text{Im} \Gamma_{\pm p, \pm q}(\pm \Phi_x, \pm \Phi_y)}{\lambda_{\pm p, \pm q}^2(\pm \Phi_x, \pm \Phi_y)}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Враховуючи, що $R_{pq(E)}^{pq(E)}(\Phi_x, \Phi_y) = R_{-p, -q(E)}^{-p, -q(E)}(-\Phi_x, -\Phi_y)$, з (2.74) отримуємо

$$\begin{aligned} & \left| R_{p, q(E)}^{00(E)}(\Phi_x, \Phi_y) \right|^2 + \eta_0^2 \left| R_{p, q(E)}^{00(H)}(\Phi_x, \Phi_y) \right|^2 = \left| R_{-p, -q(E)}^{00(E)}(-\Phi_x, -\Phi_y) \right|^2 + \\ & + \eta_0^2 \left| R_{-p, -q(E)}^{00(H)}(-\Phi_x, -\Phi_y) \right|^2. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Фізична суть співвідношення (2.75) й аналогічної рівності для TE -випадку цікава для дифракційної електроніки. Ефективність перетворення в єдину гармоніку просторового спектру, що поширюється, за збудженням ґратки однією зі згасаючих гармонік не зміниться, якщо структуру розгорнути в площині xOy навколо осі z на 180° .

2.7 Елементи спектральної теорії двовимірно-періодичних ґраток

Вивчення фізичних процесів резонансного розсіяння хвиль періодичними структурами різного типу не обмежується розрахунком їхніх електродинамічних характеристик. Аналіз аномальних просторово-часових й

просторово-частотних трансформацій електромагнітного поля вимагає залучення результатів спектральної теорії, яка вивчає особливості аналітичного продовження крайових задач в область комплексних (нефізичних) значень різних параметрів. Це означає, що проводиться аналіз поведінки систем за комплексних значень таких фізичних величин, як частота або енергія. Дослідження спектрів – це напрям, який у цей час домінує в багатьох областях фізики. Спираючись на результати, що докладно описані в роботах [1, 3, 25], сформулюємо деякі загальні твердження спектральної теорії двовимірно-періодичних структур. Роль спектрального параметра відводиться частотному параметру $k = 2\pi/\lambda$, а двовимірно-періодична ґратка розглядається як відкритий періодичний резонатор.

2.7.1 Побудова канонічної функції Гріна для двовимірно-періодичної ґратки

Назвемо канонічною функцією Гріна для двовимірно-періодичної ґратки розв'язок $\tilde{G}_0(g, p, k)$ скалярної задачі

$$\begin{cases} [\Delta_g + k^2][\tilde{G}_0(g, p, k)] = \delta(g - p); g = \{x_g, y_g, z_g\} \in \mathbb{R}, p = \{x_p, y_p, z_p\} \in Q_L \\ D[\tilde{G}_0](l_x, y_g) = e^{2\pi i \Phi_x} D[\tilde{G}_0](0, y_g); \quad 0 \leq y_g \leq l_y, \\ D[\tilde{G}_0](x_g, l_y) = e^{2\pi i \Phi_y} D[\tilde{G}_0](x_g, 0); \quad 0 \leq x_g \leq l_x, \end{cases} \quad (2.76)$$

$$\tilde{G}_0(g, p, k) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} A_{nm}(p, k) \\ B_{nm}(p, k) \end{Bmatrix} e^{\pm i \Gamma_{nm}(z_g \mp L)} \times \mu_{nm}(x_g, y_g); \quad g \in \begin{Bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{Bmatrix}. \quad (2.77)$$

У випадку найпростішої періодичної структури (будь-які матеріальні розсіювачі відсутні) в задачах такого типу, але з довільними правими частинами в рівнянні Гельмгольца, ми приходимо до вивчення поля

монохроматичних хвиль, що породжуються квазіперіодичними струмовими джерелами, локалізованими в області $|z| < L$.

Побудуємо $\tilde{G}_0(g, p, k)$ як суперпозицію

$$\tilde{G}_0(g, p, k) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \frac{\exp[ik|g - p_{nm}|]}{|g - p_{nm}|} e^{2\pi i n \Phi_x} e^{2\pi i m \Phi_y}; \quad p_{nm} = \{x_p + nl_x, y_p + ml_y, z_p\} \quad (2.78)$$

з функцій Гріна вільного простору $\mathbb{R}^3$. Використовуючи в (2.78) формулу підсумовування Пуассона [76]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(2\pi n - x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inx} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) e^{-int} dt$$

і табличні інтеграли [77]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ip\sqrt{x^2 + a^2})}{\sqrt{x^2 + a^2}} e^{ibx} dx = \pi i H_0^{(1)}\left(a\sqrt{p^2 - b^2}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}\left(p\sqrt{x^2 + a^2}\right) e^{ibx} dx = 2 \frac{\exp\left(ia\sqrt{p^2 - b^2}\right)}{\sqrt{p^2 - b^2}},$$

де $H_0^{(1)}(x)$ – циліндрична функція Ханкеля, отримаємо:

$$\tilde{G}_0(g, p, k) = -\frac{i}{2l_x l_y} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} e^{i[\alpha_n(x_g - x_p) + \beta_m(y_g - y_p)]} \times \frac{\exp[i|z_g - z_p|\Gamma_{nm}]}{\Gamma_{nm}} \quad (2.79)$$

Поверхня K аналітичного продовження канонічної функції Гріна (2.79) з

дійсної осі $\text{Im } k = 0$ в область комплексних значень k являє собою нескінченнолисту ріманову поверхню, що складається з комплексних площин $k \in \mathbb{C}$ з розрізами уздовж напрямків $(\text{Re } k)^2 - (\text{Im } k)^2 - \lambda_{nm}^2 = 0$ ($n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\text{Im } k \leq 0$) (див. рис. 2.7). Перший (фізичний) лист S_k поверхні K однозначно визначений умовами випромінювання для $\tilde{G}_0(g, p, k)$ в областях A та B , тобто вибором значень $\text{Re } \Gamma_{nm} \text{Re } k \geq 0$ та $\text{Im } \Gamma_{nm} \geq 0$ на осі $\text{Im } k = 0$. На цьому листі на інтервалі $0 < \arg k < \pi$ ми маємо: $\text{Im } \Gamma_{nm} > 0$ та $\text{Re } \Gamma_{nm} \geq 0$ для $0 < \arg k \leq \pi/2$ та $\text{Re } \Gamma_{nm} \leq 0$ для $\pi/2 \leq \arg k < \pi$. На інтервалі $3\pi/2 \leq \arg k < 2\pi$ для скінченного числа функцій $\Gamma_{nm}(k)$ (з n та m такими, що $(\text{Re } k)^2 - (\text{Im } k)^2 - \lambda_{nm}^2 > 0$) виконуються нерівності $\text{Im } \Gamma_{nm} < 0$, $\text{Re } \Gamma_{nm} > 0$, для всіх інших функцій ми маємо $\text{Im } \Gamma_{nm} > 0$ та $\text{Re } \Gamma_{nm} \leq 0$. На інтервалі $\pi < \arg k \leq 3\pi/2$ ситуація аналогічна, але з протилежними знаками при $\text{Re } \Gamma_{nm}$.

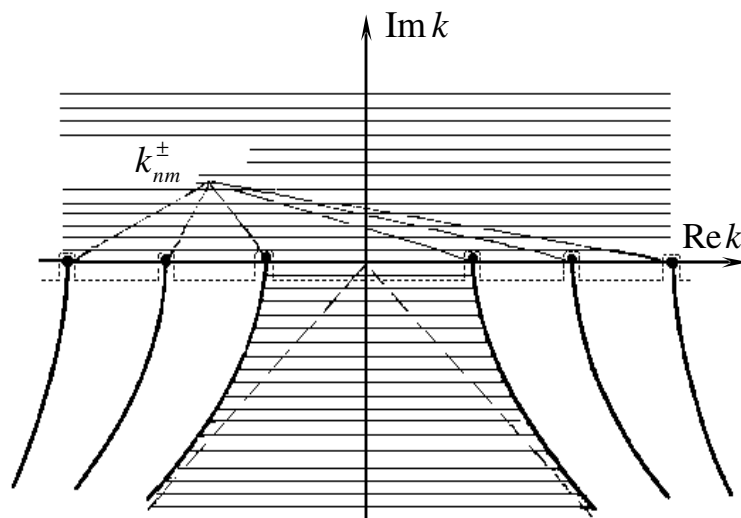


Рисунок 2.7 – Область змінювання спектрального параметра k :
перший лист поверхні K

Наступні листи (кожен з них зі своїм власним набором пар $\{k \rightarrow \Gamma_{nm}(k)\}$, що задають зв'язок між положенням точки k на листі та значеннями функцій $\text{Im } \Gamma_{nm}(k)$ та $\text{Re } \Gamma_{nm}(k)$ в цій точці) мають, на відміну від першого, протилежні

знаки (гілки кореня) $\Gamma_{nm}(k)$ для скінченного числа значень індексів n та m . Розрізи (безперервні лінії на рис. 2.7) починаються в дійсних алгебраїчних точках розгалуження $k_{nm}^{\pm} = \pm |\lambda_{nm}|$.

В околі будь-якої фіксованої точки $K \in K$ функція $\tilde{G}_0(g, p, k)$ розкладається в ряд Лорана за степенями локальної змінної [78]

$$\kappa = \begin{cases} k - K, & K \notin \{k_{nm}^{\pm}\} \\ \sqrt{k - K}, & K \in \{k_{nm}^{\pm}\} \end{cases}.$$

Отже, це мероморфна функція на поверхні K . Обчислюючи лишки $\text{Res}_{k=\bar{k}} \tilde{G}_0(g, p, k)$ в її простих полюсах $\bar{k} \in \{k_{nm}^{\pm}\}$, отримуємо

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{E}}(g, k_{nm}^{\pm}) &= \{\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z\}; \quad \tilde{E}_{x, y \text{ або } z} = a_{x, y \text{ або } z} \exp[i(\alpha_n x + \beta_m y)], \\ \tilde{\vec{H}}(g, k_{nm}^{\pm}) &= (ik_{nm}^{\pm} \eta_0)^{-1} \text{rot} \tilde{\vec{E}}(g, k_{nm}^{\pm}), \end{aligned} \quad (2.80)$$

$a_{x, y \text{ або } z}$ – довільні константи. Вираз (2.80) містить нетривіальні розв'язки однорідних ($\tilde{U}^i(g, k) \equiv 0$) канонічних ($\bar{\epsilon}(g, k) \equiv 1$, $\mu(g, k) \equiv 1$ та $\overline{\text{int } S} = \emptyset$ – порожня множина) задач (2.53)–(2.55) та (2.61)–(2.63). Ці розв'язки визначають можливі вільні колювання поля у вільному просторі, що задовольняють умовам квазіперіодичності $D \left[\tilde{\vec{E}} \left(\tilde{\vec{H}} \right) \right] (x + l_x, y) = \exp(2\pi i \Phi_x) D \left[\tilde{\vec{E}} \left(\tilde{\vec{H}} \right) \right] (x, y)$ та $D \left[\tilde{\vec{E}} \left(\tilde{\vec{H}} \right) \right] (x, y + l_y) = \exp(2\pi i \Phi_y) D \left[\tilde{\vec{E}} \left(\tilde{\vec{H}} \right) \right] (x, y)$.

2.7.2 Точковий спектр

Точковий спектр Ω_k ґратки можна визначити як множину точок

$\{\bar{k}_j\}_{j=1}^{\infty} \in K$ таких, що для всіх $k \in \{\bar{k}_j\}_j$ однорідна (спектральна) задача

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_0 \operatorname{rot} \tilde{H}(g, k) = -ik \bar{E}(g, k) \tilde{E}(g, k), \quad \operatorname{rot} \tilde{E}(g, k) = ik \eta_0 \mu(g, k) \tilde{H}(g, k); \quad g \in Q_L \\ D[\tilde{E}(\tilde{H})](l_x, y) = e^{2\pi i \Phi_x} D[\tilde{E}(\tilde{H})](0, y); \quad 0 \leq y \leq l_y \\ D[\tilde{E}(\tilde{H})](x, l_y) = e^{2\pi i \Phi_y} D[\tilde{E}(\tilde{H})](x, 0); \quad 0 \leq x \leq l_x; \quad |z| < L \\ \tilde{E}_{tg}(g, k)|_{g \in S} = 0, \quad \tilde{H}_{nr}(g, k)|_{g \in S} = 0, \end{array} \right. \quad (2.81)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{array} \right\} = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} A_{nm(E)}(k) \\ A_{nm(H)}(k) \end{array} \right\} e^{i\Gamma_{nm}(z-L)} \mu_{nm}(x, y); \quad g \in \bar{A}, \quad (2.82)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{array} \right\} = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} B_{nm(E)}(k) \\ B_{nm(H)}(k) \end{array} \right\} e^{-i\Gamma_{nm}(z+L)} \mu_{nm}(x, y); \quad g \in \bar{B}, \quad (2.83)$$

має нетривіальний розв'язок $\tilde{U}(g, \bar{k}_j) = \{\tilde{E}(g, \bar{k}_j), \tilde{H}(g, \bar{k}_j)\}$. Такі розв'язки описують вільні коливання поля в ґратці, основні характеристики яких (конфігурація поля коливань, якісний склад їхніх просторових гармонік і поведінка цих гармонік при великих $|z|$ та t) визначаються величиною $\bar{k}_j = \operatorname{Re} \bar{k}_j + i \operatorname{Im} \bar{k}_j$ та положенням точки $\bar{k}_j$ (власної частоти, що відповідає вільному коливанню $\tilde{U}(g, \bar{k}_j)$) на поверхні K [1, 3, 25]. Продовжуючи задачі (2.53)–(2.55) та (2.61)–(2.63) і їхні розв'язки $\tilde{U}(g, k) = \{\tilde{E}(g, k), \tilde{H}(g, k)\}$ в область K комплексних значень k , ми виявимо в точках $k = \bar{k}_j$ полюси функцій $\tilde{U}(g, k)$, в околі яких шукані розв'язки можуть бути зображені рядами

Лорана за степенями локальної на поверхні K змінної k [78]. Такі зображення (локальні теореми про розкладання розв'язків $\tilde{U}(g, k)$) дають підстави для аналітичного дослідження фізичних особливостей резонансного розсіяння монохроматичних та імпульсних хвиль одновимірно- і двовимірно-періодичними структурами [1, 3, 25, 79–81].

Отримуємо тепер ряд умов, які обмежують можливість існування нетривіальних розв'язків задачі (2.81)–(2.83). Ці умови можуть розглядатися як теореми єдиності розв'язків задач (2.53)–(2.55) та (2.61)–(2.63), сформульовані для різних ділянок поверхні K . Відзначимо, що вивчення питання про єдиність дозволяє оцінити області локалізації елементів множини Ω_k на K , а в подальшому – істотно спростити або прискорити числовий розв'язок спектральних задач за рахунок звуження зони пошуку власних частот. Теореми єдиності є також основою для застосування «аналітичної» теореми Фредгольма [31] при побудові строго обґрунтованих алгоритмів розв'язку дифракційних задач й дослідженні якісних характеристик повних спектрів ґраток [1, 3].

Нехай елементи ґратки, що розсіюють, не є дисперсними ($\varepsilon(g, k) = \varepsilon(g)$, $\mu(g, k) = \mu(g)$ та $\sigma(g, k) = \sigma(g)$) – це значно спрощує ситуацію з аналітичним продовженням спектральної задачі (2.81)–(2.83) в область комплексних значень параметра k . З інтегральної форми теореми про комплексну потужність, яка для нетривіальних рішень $\tilde{U}(g, \bar{k}_j)$ цієї задачі набуває вигляду

$$\oint_{S_L} \left(\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^* \right) \cdot \vec{ds} = \int_{Q_L} \operatorname{div} \left(\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^* \right) dg = ik\eta_0 \int_{Q_L} \mu \left| \tilde{\vec{H}} \right|^2 dg - \frac{ik^*}{\eta_0} \int_{Q_L} \varepsilon \left| \tilde{\vec{E}} \right|^2 dg - \int_{Q_L} \sigma \left| \tilde{\vec{E}} \right|^2 dg, \quad (2.84)$$

впливають такі співвідношення:

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nm}^2} \left\{ \begin{aligned} & (\operatorname{Re} \Gamma_{nm} \operatorname{Re} k + \operatorname{Im} \Gamma_{nm} \operatorname{Im} k) \\ & (\operatorname{Im} \Gamma_{nm} \operatorname{Re} k - \operatorname{Re} \Gamma_{nm} \operatorname{Im} k) \end{aligned} \right\} \left[\left(|A_{nm(E)}|^2 + |B_{nm(E)}|^2 \right) \pm \right. \\ \left. \pm \eta_0^2 \left(|A_{nm(H)}|^2 + |B_{nm(H)}|^2 \right) \right] = \frac{1}{\varepsilon_0} \left\{ \begin{aligned} & -\operatorname{Im} k (V_3 + V_2) - V_1 \\ & \operatorname{Re} k (V_3 - V_2) \end{aligned} \right\}. \quad (2.85)$$

Тут $k = \bar{k}_j$, $\tilde{E} = \tilde{E}(g, \bar{k}_j)$, $\Gamma_{nm} = \Gamma_{nm}(\bar{k}_j)$, $A_{nm(E)} = A_{nm(E)}(\bar{k}_j)$ і т.д. й введені позначення $V_1 = \varepsilon_0 \eta_0 \int_{Q_L} \sigma |\tilde{E}|^2 dg$, $V_2 = \int_{Q_L} \varepsilon_0 \varepsilon |\tilde{E}|^2 dg$, $V_3 = \int_{Q_L} \mu_0 \mu |\tilde{H}|^2 dg$.

Не існує вільних коливань поля, амплітуди яких не задовольняють рівнянням (2.85). З цього загального твердження випливає низка важливих наслідків, частково сформульованих нижче для ґраток, виконаних зі звичайних матеріалів ($\varepsilon(g) > 0$, $\mu(g) > 0$ і $\sigma(g) \geq 0$).

- Не існує вільних коливань поля, власні частоти $\bar{k}_j$ яких розташовані у верхній півплощині ($\operatorname{Im} k > 0$) першого листа поверхні K . В цьому можна переконатися, розглядаючи верхнє з співвідношень (2.85) й беручи до уваги розподіл значень $\Gamma_{nm}(k)$ на C_k та нерівності $V_1 \geq 0$, $V_2 > 0$, $V_3 > 0$.

- Коли $\sigma(g) \equiv 0$ (ґратка не поглинає енергію поля), не існує й вільних коливань, власні частоти $\bar{k}_j$ яких розташовані в нижній півплощині ($\operatorname{Im} k < 0$) листа C_k між розрізами, що відповідають найменшим за модулем значенням $k_{nm}^{\pm}$. На рис. 2.7 ця область першого листа поверхні K та область, яку ми згадували вище, заштриховані горизонтальними лініями.

- Якщо $\sigma(g) > 0$ на будь-якій множині точок $g \in Q_L$ ненульової міри, то на дійсній осі площини C_k немає елементів $\bar{k}_j$ точкового спектру ґратки Ω_k .

Повне дослідження спектральних характеристик ґратки – системи точок $k \in K$, для яких задачі дифракції (2.53)–(2.55) та (2.61)–(2.63) не можуть бути однозначно розв’язані, їхні локалізації, динаміки і т.п. – це дуже складне завдання. Нижче ми тільки намічаємо деякі з кроків, реалізація яких може

призвести до добре обґрунтованих результатів. Перший крок пов'язаний з регуляризацією крайової задачі, яка описує збудження металодіелектричних ґраток квазіперіодичними струмами $\tilde{j}(g, k) \leftrightarrow \tilde{j}(g, t)$, локалізованими в області Q_L :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_0 \operatorname{rot} \tilde{H}(g, k) = -ik \bar{\varepsilon}(g, k) \tilde{E}(g, k) + \eta_0 \tilde{j}(g, k), \quad \operatorname{rot} \tilde{E}(g, k) = ik \eta_0 \mu(g, k) \tilde{H}(g, k); \\ g \in Q_L \\ D \left[\tilde{E}(\tilde{H}) \right] (l_x, y) = e^{2\pi i \Phi_x} D \left[\tilde{E}(\tilde{H}) \right] (0, y); \quad 0 \leq y \leq l_y \\ D \left[\tilde{E}(\tilde{H}) \right] (x, l_y) = e^{2\pi i \Phi_y} D \left[\tilde{E}(\tilde{H}) \right] (x, 0); \quad 0 \leq x \leq l_x; \quad |z| < L \\ \tilde{E}_{tg}(g, k) \Big|_{g \in S} = 0, \quad \tilde{H}_{nr}(g, k) \Big|_{g \in S} = 0, \end{array} \right. \quad (2.86)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{array} \right\} = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} A_{nm(E)}(k) \\ A_{nm(H)}(k) \end{array} \right\} e^{i\Gamma_{nm}(z-L)} \mu_{nm}(x, y); \quad g \in \bar{A}, \quad (2.87)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{array} \right\} = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} B_{nm(E)}(k) \\ B_{nm(H)}(k) \end{array} \right\} e^{-i\Gamma_{nm}(z+L)} \mu_{nm}(x, y); \quad g \in \bar{B}. \quad (2.88)$$

Під регуляризацією ми розуміємо (див., наприклад, [3]) зведення крайової електродинамічної задачі до еквівалентного операторного рівняння другого роду

$$\left[E + B(\tilde{G}_0, S, \bar{\varepsilon}, \mu, k) \right] X = Y; \quad EX = X \quad (2.89)$$

з компактною скінченно-мероморфною оператор-функцією [31]. Якщо задача (2.86)–(2.88) розглядається для металевої ґратки ($\overline{\operatorname{int} S} \neq \emptyset$ та S – досить гладкі поверхні; $\bar{\varepsilon}(g, k) = \mu(g, k) \equiv 1$) та для діелектричної ґратки ($\overline{\operatorname{int} S} = \emptyset$, $\bar{\varepsilon}(g, k) = \varepsilon(g)$ та $\mu(g, k) = \mu(g)$ – досить гладкі функції) окремо, то

регуляризація може бути проведена методами теорії потенціалу [25, 82].

На другому етапі необхідно обґрунтувати таке твердження: резольвента $[E + B(k)]^{-1}$ ($k \in K$) задачі (2.89) – це скінченно-мероморфна оператор-функція і її полюси $k = \bar{k}_j$ ($j = 1, 2, 3, \dots$), що складають дискретну множину нескінченних точок накопичення, збігаються зі спектром Ω_k ґратки. Це твердження випливає з «мероморфної» теореми Фредгольма й теорем єдиності, розглянутих вище [25, 31].

Ми можемо побудувати числовий розв'язок спектральної задачі (2.81)–(2.83), обертаючи однорідне операторне рівняння (2.89) [1, 25], або, іншими словами, обчислюючи комплексні власні частоти $\bar{k}_j$ й поля $\tilde{U}(g, \bar{k}_j) = \{\tilde{E}(g, \bar{k}_j), \tilde{H}(g, \bar{k}_j)\}$ вільних коливань, що пов'язані з ними, в двовимірно-періодичних відкритих резонаторах. Зазвичай, відповідні операції зводяться до наближеного розв'язання характеристичного рівняння типу

$$\det[C(k)] = 0. \quad (2.90)$$

Тут $C(k)$ – деяка нескінченна матриця-функція. Компактність оператора $B(k)$ може забезпечити існування $\det[C(k)]$ й можливість наближення розв'язків $\bar{k}$ рівняння (2.90) розв'язками $\bar{k}(N)$ рівняння $\det[C(k, N)] = 0$ з редукованою до розміру $N \times N$ матрицею $C(k, N)$ [25].

2.8 Висновки до розділу 2

У цьому розділі надані аналітичні результати, які є теоретичною основою для побудови строгих алгоритмів числового аналізу процесів перетворення імпульсних і монохроматичних електромагнітних хвиль двовимірно-періодичними ґратками. Це, перш за все, результати, пов'язані з розв'язком

однієї з найважливіших та непростих проблем обчислювальної електродинаміки – проблеми коректного обмеження простору розрахунку принципово відкритих початково-крайових задач електродинамічної теорії ґраток. Ці результати дозволили дійти до такої еквівалентної постановки початково-крайових задач, яка допускає строгий числовий аналіз випадку похило падаючих на ґратку плоских монохроматичних хвиль та забезпечує можливість використання при побудові ефективних обчислювальних схем стандартних сіткових методів. Отримано й аналітичні результати, що описують ряд важливих властивостей імпульсних і монохроматичних електромагнітних хвиль, що поширюються в регулярних частинах прямокутного каналу Флоке – в зонах відбиття й проходження двовимірно-періодичних структур. Зокрема, вперше для двовимірно-періодичних ґраток скінченної товщини, що збуджуються поперечно-електричними і поперечно-магнітними плоскими хвилями, виведені строгі аналітичні та фізичні наслідки з теореми Пойнтінга про комплексну потужність і леми Лоренца – співвідношення балансу енергії за гармоніками, що поширюються і загасають, співвідношення взаємності і т.д. Розвинений у розділі операторний метод (метод транспортних операторів – просторово-часовий аналог відомого та широко використовуваного в задачах частотної області методу узагальнених матриць розсіювання) значно скорочує вимоги до ресурсів комп'ютерів при розрахунку багат шарових ґраток і ґраток на товстих діелектричних підкладнях, що часто зустрічаються в оптиці. Вирішено низку питань спектральної теорії двовимірно-періодичних ґраток, побудова якої необхідна для вірного фізичного аналізу процесів резонансного розсіювання хвиль відповідними структурами: побудована канонічна функція Гріна, визначена природна область варіації спектрального параметра (комплексної частоти), сформульовані твердження, що дозволяють оцінити області локалізації елементів спектральної множини, намічено наступні кроки, здійснення яких необхідне для подальшого просування в цьому напрямку.

РОЗДІЛ 3

2-D ФОТОННІ КРИСТАЛИ: МОДЕЛІ МЕТОДУ ТОЧНИХ ПОГЛИНАЮЧИХ УМОВ І ОСНОВИ СПЕКТРАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ

У 1987 році опубліковані роботи [83, 84], що відкрили, як зараз зазвичай говорять, новий напрямок у вивченні періодичних структур – 1-D, 2-D та 3-D фотонних кристалів, які, завдяки своїй властивості не пропускати електромагнітні хвилі в певних частотних діапазонах та низці інших незвичайних властивостей, складають інтерес, як з точки зору фундаментальної науки, так і з точки зору науки прикладної. У нашій роботі ми розглядатимемо 2-D фотонні кристали – діелектричні або металодіелектричні структури, нескінченні й однорідні в напрямку z та періодичні в напрямках x і y , а також їхні просторово обмежені аналоги.

Стандартні підходи [30] дозволяють досить точно розраховувати ізочастоти 2-D фотонних кристалів для обраної смуги пропускання і в координатах, пов'язаних з хвильовими векторами власних хвиль, а також дисперсійні залежності для скінченного числа таких хвиль, зазвичай, на відрізках прямих, які з'єднують кутові точки частини зони Бріллюена, що не проводить. Відповідні дані є підставою для якісного й наближеного кількісного аналізу скінченних регулярних фотонних структур і структур з «дефектами», орієнтованих на реалізацію ефектів, що становлять практичний інтерес [30, 56, 63, 85]. Але результати такого аналізу носять, зазвичай, рекомендаційний чи здогадний характер і не можуть бути безпосередньо використані на практиці. Для останньої важливо, щоб реалізовані в обчислювальних експериментах теоретичні моделі адекватно описували фізику процесів поширення й розсіювання хвиль, що досліджуються, та дозволяли зводити цей опис до оцифрування стандартного набору загальноприйнятих характеристик. Таких, наприклад, як ті, які використовуються в класичній теорії хвилеводів або електродинамічній теорії ґраток.

Можливість вирішення виникаючих на цьому шляху непростих проблем ми пов'язуємо з використанням моделей методу точних поглинаючих умов [1, 3, 32, 86], що дозволяють отримувати вірогідні відомості щодо просторово-часових і просторово-частотних трансформацій електромагнітного поля в умовах можливого резонансного розсіювання хвиль. У даному розділі в межах таких моделей розглядаються конкретні, зовсім не елементарні задачі теорії 2-D фотонних кристалів, й під час розв'язання кожної з цих задач отримуються нові фізичні результати.

У другій половині розділу ми звернулися до класичних 2-D фотонних кристалів для того, щоб з'ясувати низку важливих для їхньої теорії питань, що пов'язані з якісним вивченням їхніх частотних спектрів і з алгоритмізацією відповідних спектральних задач.

3.1 Моделі методу точних поглинаючих умов для просторово обмежених фотонних кристалів

3.1.1 Періодичні структури скінченної товщини

Скалярна задача

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[-\varepsilon(g) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma(g) \eta_0 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U(g, t) = 0; \quad g \in Q_L, \quad t > 0 \\ U(g, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} U(g, t) \Big|_{t=0} = 0; \quad g = \{y, z\} \in \bar{Q}_L \\ \vec{E}_{tg}(q, t) \quad \text{і} \quad \vec{H}_{tg}(q, t) \quad \text{безперервні під час перетину} \quad S^{\varepsilon, \sigma}, \\ \vec{E}_{tg}(q, t) \Big|_{q=\{x, y, z\} \in S} = 0, \quad U \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} \right\} (l_y, z, t) = e^{2\pi i \Phi} U \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} \right\} (0, z, t) \\ \text{для} \quad L_2 < z < L_1, \quad \text{і} \quad D_2[U(g, t)] \Big|_{g \in L_-} = 0, \\ D_1[U(g, t) - U_p^i(g, t)] \Big|_{g \in L_+} = 0; \quad t \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

описує просторово-часові трансформації TM - або TE -поляризованих хвиль, в поле яких поміщається нескінченна й однорідна вздовж осі x та періодична вздовж осі y одновимірно-періодична ґратка (див. [1, 3, 86] та рис. 3.1).

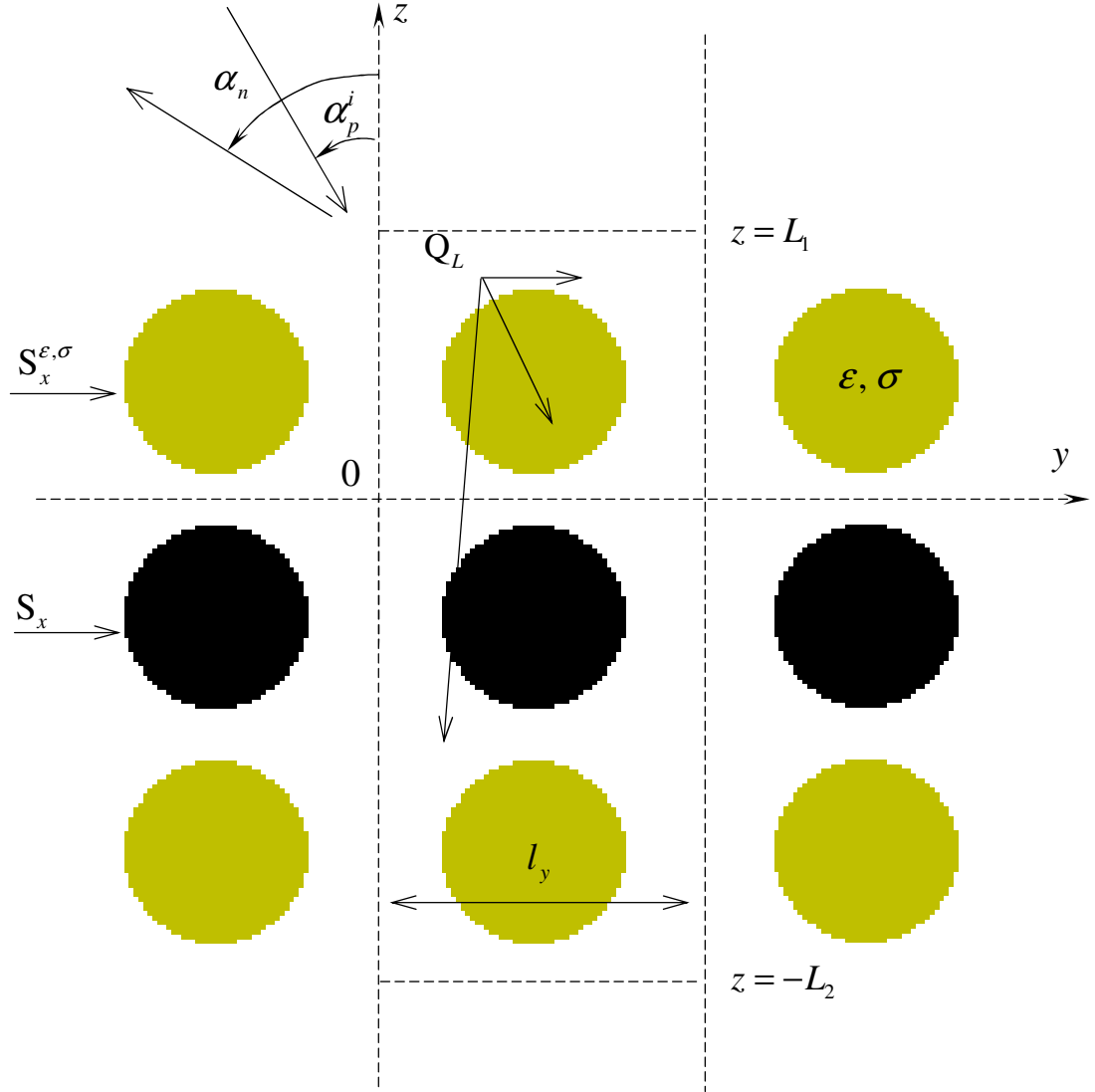


Рисунок 3.1 – Геометрія модельної задачі (3.1)

Якщо всі горизонтальні шари ґратки однакові та розташовані на однаковій відстані l_z один від одного, ця ж задача описує й властивості 2-D фотонного кристала, обмеженого за товщиною. Тут $U(g, t) = E_x(g, t)$ у випадку E -поляризації поля ($E_y = E_z = H_x \equiv 0$) та $U(g, t) = H_x(g, t)$ у випадку H -поляризації ($H_y = H_z = E_x \equiv 0$); $\sigma(g) \geq 0$ та $\varepsilon(g) \geq 1$; $\Phi: |\Phi| \leq 0.5$ – дійсний

параметр. Поверхні $S = S_x \times [|x| \leq \infty]$ ідеальних провідників і поверхні $S^{\varepsilon, \sigma} = S_x^{\varepsilon, \sigma} \times [|x| \leq \infty]$ розривів матеріальних параметрів $\sigma(g)$ та $\varepsilon(g)$ припускаються досить гладкими. Область аналізу $Q_L = \{g \in \mathbb{R} : -L_2 < z < L_1\}$ є частиною каналу Флоке $R = \{g : 0 < y < l_y\}$, яка обмежена контурами S_x і віртуальними межами L_+ ($z = L_1$) та L_- ($z = -L_2$). Поле імпульсних хвиль $U(g, t) - U_p^i(g, t)$ та $U(g, t)$, що уходять в області $A = \{g = \{y, z\} \in \mathbb{R} : z > L_1\}$ та $B = \{g = \{y, z\} \in \mathbb{R} : z < -L_2\}$, обчислюється за значеннями $U(g, t)|_{g \in L_+ \text{ або } g \in L_-}$ з використанням так званих транспортних операторів [1, 3, 32, 86], що визначають і аналітичну форму операторів $D_j[\dots]$ в точних поглинаючих умовах $D_1[U(g, t) - U_p^i(g, t)]|_{g \in L_+} = 0$ та $D_2[U(g, t)]|_{g \in L_-} = 0$. Функція $U_p^i(g, t) = v_p(z, t) \mu_p(y)$ ($g \in A$, $t > 0$, $\mu_p(y) = l_y^{-1/2} \exp(i\Phi_p y)$, $\Phi_p = (p + \Phi)2\pi/l_y$, p – ціле число) визначає поле хвилі, що набігає на періодичну структуру з області A . Її, а також функції $\varepsilon(g)$ та $\sigma(g)$, контури S_x , межі $L_{\pm}$ і параметри Φ , p , l_y вважаємо заданими.

Розв'язок $U(g, t)$ задачі (3.1) за допомогою інтегрального перетворення $\tilde{f}(k) = \int_0^T f(t) \exp(ikt) dt$ конвертується в стандартний набір амплітудно-частотних характеристик періодичної структури: $W_{np}^R(k)$, $W_{np}^T(k)$ і т.д. [1, 3, 32, 86]. Тут $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число, λ – довжина хвилі у вільному просторі; T – верхня межа інтервалу $[0, T]$ часу спостереження t : для всіх $t > T$ функція $f(t)$ припускається рівною нулю. Величини $W_{np}^R(k)$ та $W_{np}^T(k)$ визначають частку розсіяної ґраткою енергії, що припадає на просторові гармоніки вторинного поля, що поширюються в зонах відбиття ($z > L_1$) і проходження ($z < -L_2$) періодичної структури без загасання. При будь-якому скінченному k число таких гармонік обмежено. Їм відповідають номери n такі,

що $\text{Im}\Gamma_n = \sqrt{k^2 - \Phi_n^2} = 0$. Гармоніки, що поширюються – це звичайні плоскі хвилі, що йдуть від ґратки в напрямках $z = \pm\infty$ під кутами $\alpha_n = -\arcsin(\Phi_n/k)$ в зоні відбиття $z > L_1$ та $\alpha_n = \pi + \arcsin(\Phi_n/k)$ в зоні проходження $z < -L_2$. Величина цих кутів (всі кути відлічуються від осі z проти годинникової стрілки) залежить від номера гармоніки n , кута $\alpha_p^i = \arcsin(\Phi_p/k)$ приходу первинної хвилі та параметра Φ (див. рис. 3.1 та [86]). Для структур без теплових втрат ($\sigma(g) \equiv 0$) $\sum_n [W_{np}^R(k) + W_{np}^T(k)] = 1$.

3.1.2 Компактні структури

Метод точних поглинаючих умов дозволяє замінити оригінальну відкриту задачу для компактних у площині yOz й однорідних вздовж осі x структур (рис. 3.2) такою еквівалентною закритою задачею [1, 3, 32]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[-\varepsilon(g) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma(g) \eta_0 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U(g, t) = F(g, t); \quad g \in Q_L, \quad t > 0 \\ U(g, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} U(g, t) \right|_{t=0} = 0; \quad g = \{y, z\} \in \bar{Q}_L \\ \vec{E}_{tg}(q, t) \quad \text{і} \quad \vec{H}_{tg}(q, t) \quad \text{безперервні під час перетину} \quad S^{\varepsilon, \sigma}, \\ \vec{E}_{tg}(q, t) \Big|_{q=\{x, y, z\} \in S} = 0, \quad \text{і} \quad D[U(g, t)] \Big|_{g \in L} = 0, \quad D_2[U(g, t)] \Big|_{g \in L_2} = 0, \\ D_1[U(g, t) - U_p^i(g, t)] \Big|_{g \in L_1} = 0; \quad t \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Область аналізу Q_L є частиною площини yOz , обмеженою контурами S_x , віртуальними межами L_j , $j=1,2$ в поперечному перерізі живильних хвилеводів A_j і прямокутною віртуальною межею L у вільному просторі (рис. 3.2). Питома провідність $\sigma(g)$ та відносна діелектрична проникність

$\varepsilon(g)$ набувають значення вільного простору поза області Q_L . Всі розсіювальні елементи, що задані кусково-сталими функціями $\varepsilon(g)$ та $\sigma(g)$ й кусково-гладкими контурами S_x та $S_x^{\varepsilon,\sigma}$, зосереджені в області Q_L .

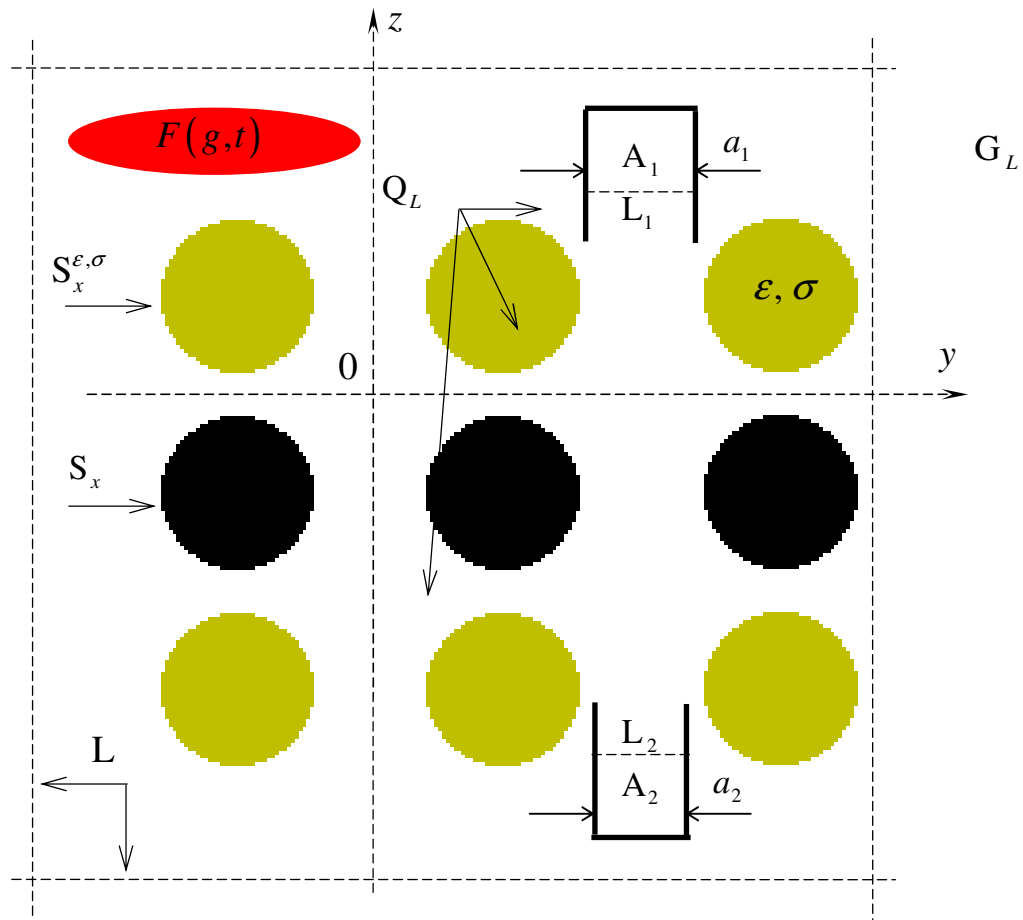


Рисунок 3.2 – Геометрія модельної задачі (3.2)

Аналітичні форми операторів $D_1[\dots]$, $D_2[\dots]$ та $D[\dots]$ надані в [32]. Точні поглинаючі умови, що відповідають цим операторам, дозволяють нам скоротити обчислювальну область до обмеженої області Q_L без зміни розв'язку в нескінченній області. Хвилі, що набігають із області Q_L , проходять через віртуальні межі L_j та L без відбиття та мовби повністю поглинаються цими межами. Вони поширюються таким чином, що області A_1 та A_2 можуть

розглядатися як звичайні напівнескінченні хвилеводи. Ці хвилі не помічають віртуальну межу L , що розділяє Q_L і частину вільного простору G_L , де немає джерел електромагнітних хвиль та об'єктів, які їх розсіюють.

Функція $U_p^i(g, t) = v_{p1}(z, t) \mu_{p1}(y)$ ($g = \{y, z\} \in A_1$, $p \geq 0$ – ціле число), що є частиною точної поглинаючої умови на віртуальній межі L_1 , визначає TE_{0p} - (у випадку E -поляризації поля) або TM_{0p} -імпульс (в H -випадку), що збуджує об'єкт дослідження. Ця функція або, точніше, величина її просторово-часової амплітуди $v_{p1}(z, t)$ на межі L_1 , так само як і функції $\varepsilon(g)$, $\sigma(g)$ та контури S_x , припускається заданою. Послідовності власних поперечних функцій $\{\mu_{n1}(y)\}_n$ для плоскопаралельного хвилеводу шириною a_1 і для обох можливих поляризацій хвиль, що в ньому поширюються, можна знайти в [1, 32]. Збудження об'єкта може бути здійснено й струмовими джерелами, аналітичну форму яких визначає функція $F(g, t)$.

В області G_L поле $U(g, t)$ визначається своїми значеннями на межі L і розраховується після розв'язку задачі (3.2) за допомогою точних умов випромінювання для імпульсних хвиль, що уходять, наданих в [32]. Розв'язок $U(g, t)$ задачі (3.2) інтегральним перетворенням $\tilde{f}(k) = \int_0^T f(t) \exp(ikt) dt$ конвертується в набір амплітудно-частотних характеристик компактної структури. Наведемо деякі з цих характеристик:

- $W_{np}^R(k)$ та $W_{np}^T(k)$ – ефективність перетворення енергії TE_{0p} - або TM_{0p} - монохроматичної хвилі, що набігає з хвилеводу A_1 крізь межу L_1 , в енергію TE_{0n} - ($n=1, 2, 3, \dots$) або TM_{0n} -хвиль ($n=0, 1, 2, \dots$), що відбилися в хвилевід A_1 та пройшли в хвилевід A_2 ;

- $\eta(k) = 1 - W_{\text{abs}}(k) - \sum_n [W_{np}^R(k) + W_{np}^T(k)]$ – ефективність перетворення TE_{0p} - або TM_{0p} -хвилі збудження в хвилі випромінювання;

$$\bullet \quad D(\phi, k, M) = \left| \tilde{E}_{tg}(M, \phi, k) \right|^2 / \max_{0 \leq \phi \leq 2\pi} \left| \tilde{E}_{tg}(M, \phi, k) \right|^2, \quad 0 \leq \phi \leq 360^\circ, \quad K_1 \leq k \leq K_2$$

– нормована діаграма спрямованості випромінювання, розрахована на дузі $\rho = M$.

Тут $W_{abs}(k)$ – це частина енергії, що поглинається в неідеальних елементах структури; $\tilde{E}_{tg}(M, \phi, k)$ – тангенційна компонента електричного поля на циліндричній поверхні $\rho = M$, яка охоплює всі джерела хвиль і розсіювальні об'єкти; ρ та ϕ – полярні координати в площині yOz .

Якщо елементарна комірка компактного об'єкта переходить в саму себе при зсуві вздовж осі y на величину l_y і при зсуві вздовж осі z на величину l_z , то ми в задачі (3.2) маємо справу з просторово обмеженим у напрямках y і z 2-D фотонним кристалом.

3.2 Заборонені зони просторово обмежених фотонних кристалів

Під час розв'язання задач аналізу просторово обмежених структур та структур з «дефектами» ми беремо за основу для подальших модифікацій простий фотонний кристал, який вже розглядався в [30]. Цей кристал утворюють круглі діелектричні циліндри ($\varepsilon = 8,9$, $\sigma = 0$), напрямні яких паралельні осі x . Осі циліндрів при перетині з площинами $x = const$ задають вузли нескінченної у напрямках y та z прямокутної сітки, розмір комірок якої дорівнює $l \times l$ ($l_y = l_z = l$). Радіус циліндрів $r = 0,38l$. Результати обчислювальних експериментів у підрозділах 3.2–3.5 надані, переважно, для випадку E -поляризації поля – вектор $\vec{H}$ лежить у площини yOz . При їхньому аналізі поляризація поля додатково не обмовляється. Аналіз результатів для H -випадку супроводжується згадуванням поляризації поля, для якої він

проведений.

3.2.1 Кристал, обмежений за товщиною

Збудимо ґратки, що містять 3, 4, 5 та 10 однакових шарів з періодично розташованих круглих діелектричних циліндрів (див. рис. 3.1), нормально падаючим ($\alpha_0^i = \Phi = 0$) надширокосмуговим імпульсом

$$U_0^i(g, \tau): v_0(z = L_1, \tau) = 4 \frac{\sin[\Delta\kappa(\tau - \tilde{T})]}{(\tau - \tilde{T})} \cos[\tilde{\kappa}(\tau - \tilde{T})] \chi(\bar{T} - \tau) = F_1(\tau);$$

$$\tilde{\kappa} = 0,5; \quad \Delta\kappa = 0,45; \quad \tilde{T} = 150; \quad \bar{T} = 300.$$

(3.3)

Відстань між центрами циліндрів у двох сусідніх шарах дорівнює періоду ґратки l . Тут $\kappa = lk/2\pi = l/\lambda$ – безрозмірний частотний параметр, $\tau = 2\pi t/l$ – безрозмірний часовий параметр, $\chi(\dots)$ – ступінчаста функція Хевісайда. Параметри $\tilde{\kappa}$ та $\Delta\kappa$ задають центральну частоту імпульсу $F_1(\tau)$ та смугу $\tilde{\kappa} - \Delta\kappa \leq \kappa \leq \tilde{\kappa} + \Delta\kappa$ ($0,05 \leq \kappa \leq 0,95$), яку він окупує [29], а параметри $\tilde{T}$ та $\bar{T}$ – час запізнювання сигналу $U_0^i(g, \tau)$ і його тривалість.

В діапазоні частот $0,05 \leq \kappa \leq 0,95$ ґратки (ми будемо називати їх кристалами, обмеженими за товщиною) працюють в одномодовому режимі [3, 23, 25] – в зонах відбиття й проходження тільки основні просторові гармоніки (гармоніки з номером $n = 0$) поширюються без загасання. Енергію хвиль, що пройшли в зону $z < -L_2$, зображено на рис. 3.3.

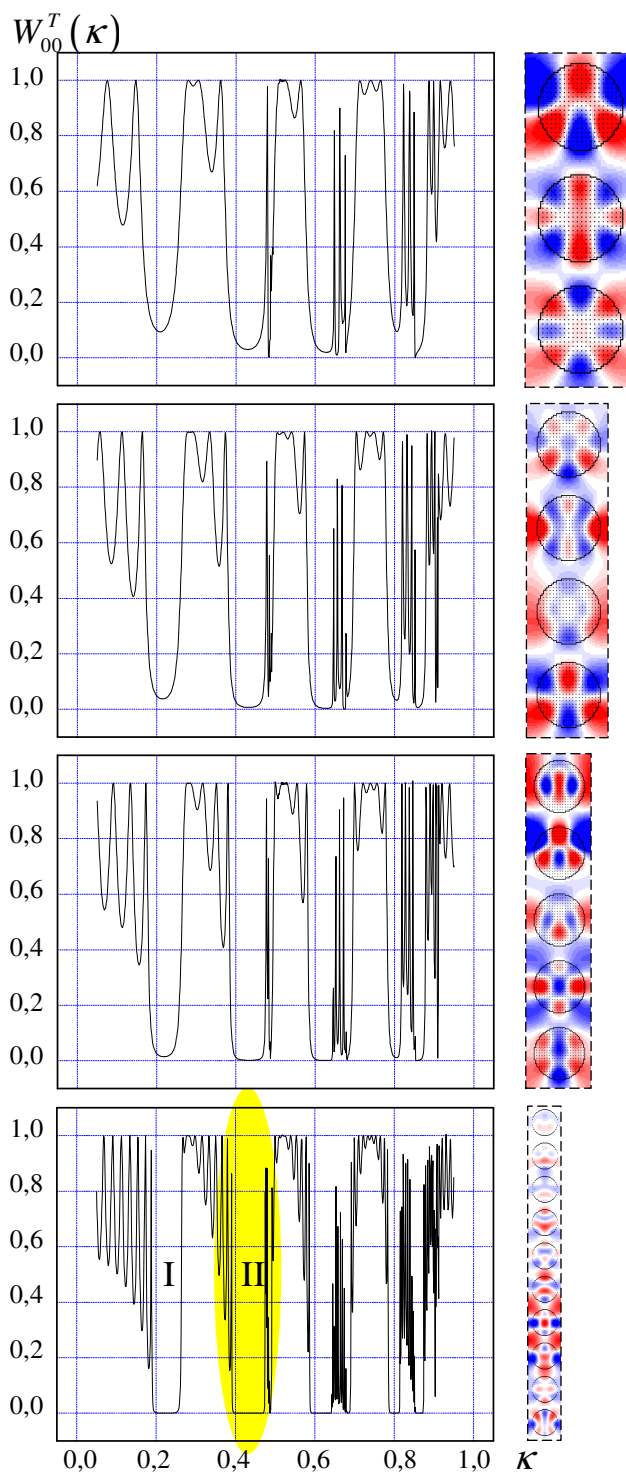


Рисунок 3.3 – Збудження кристала імпульсом (3.3). Формування заборонених зон I, II, і т.д. при збільшенні кількості шарів у ґратці. Вільні коливання поля поля в структурах – розподіл значень $E_x(g, t)$, $g \in Q_L$, $\tau = 1000$

Заборонені зони (смуги частот, де $W_{00}^T(\kappa) = 0$), контури яких у випадку тришарового кристала тільки позначені, остаточно формуються структурами,

що містять десять та більше шарів. До лівої межі першої такої зони (до значень $\kappa \approx 0,2$) фотонний кристал скінченної товщини працює як однорідна діелектрична пластина – він повністю пропускає нормально падаючу плоску хвилю при значеннях κ , які відповідають напівхвильовим резонансам за її товщиною. Еквівалентна діелектрична проникність такої пластини у випадку ґратки з десяти шарів приблизно дорівнює 5,2.

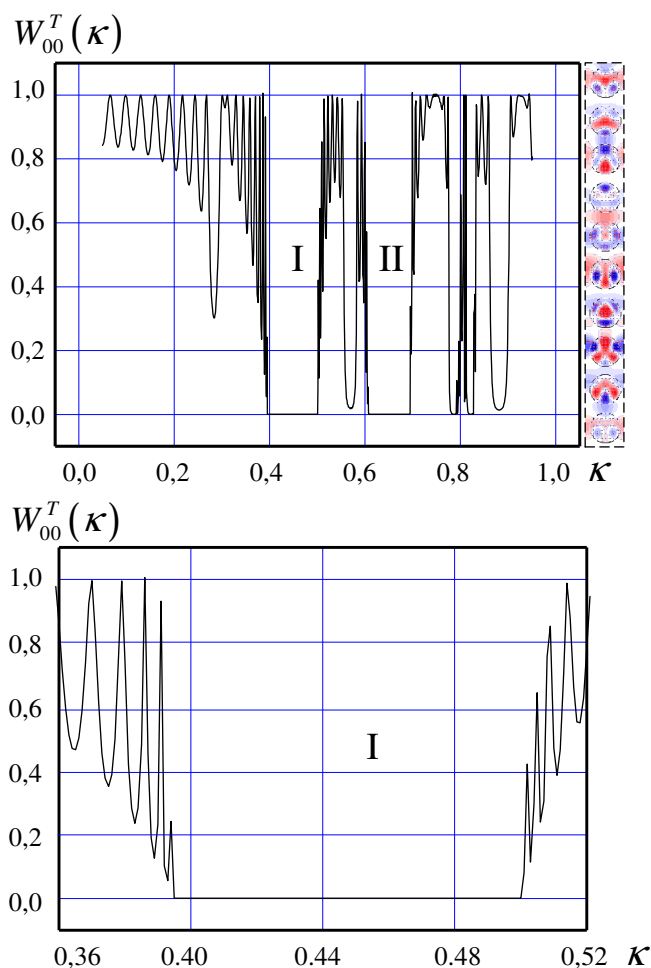


Рисунок 3.4 – Збудження кристала H -поляризованим імпульсом (3.3).
Заборонені зони I, II кристала з десяти шарів. Вільні коливання поля в
структурі – розподіл значень $H_x(g, t)$, $g \in Q_L$, $\tau = 1000$

У випадку H -поляризації поля (рис. 3.4) процес формування заборонених зон також закінчується при збільшенні кількості шарів у структурі до десяти. Смуги частот, які займають ці зони, частково перетинаються зі

смугами непропускання нормально падаючих E -поляризованих хвиль (див. рис. 3.3 та рис. 3.4). Так, зона II у випадку E -поляризації перетинається із зоною I в H -випадку на смузі $0,397 \leq \kappa \leq 0,47$ (ширина смуги $B_{\kappa} = 2(\kappa_{\text{upp}} - \kappa_{\text{low}}) / (\kappa_{\text{upp}} + \kappa_{\text{low}}) \times 100\% \approx 17\%$). Зона III у випадку E -поляризації перетинається із зоною II у H -випадку на смузі $0,61 \leq \kappa \leq 0,64$ (ширина смуги $B_{\kappa} \approx 5\%$).

Зі збільшенням параметру Φ заборонена зона I, практично не змінюючись за шириною, «дрейфує» в бік менших значень κ (рис. 3.5). Треба відзначити, що великим значенням Φ при однакових значеннях частотного параметра κ відповідають великі кути α_0^i , які задають напрям приходу первинної плоскої хвилі на ґратку. Якщо підсумувати інформацію, зображену на рис. 3.4 та рис. 3.5, то можна дійти висновку, що десятишаровий кристал не пропускає H -поляризовані хвилі, що приходять під кутами $0 \leq \alpha_0^i \leq 56,4^\circ$, для всіх $0,396 \leq \kappa \leq 0,45$.

3.2.2 Компактні кристали

Заборонені зони для кристала скінченної товщини не збігаються з такими для нескінченного у всіх напрямках двовимірно-періодичного фотонного кристала [30]. Повного збігу немає і з забороненими зонами компактних кристалів – структур, що обмежені в площині yOz та однорідні в напрямку x (див. рис. 3.6). Про характер розбіжності можна судити, порівнюючи криві на рис. 3.7 та рис. 3.8. Рис. 3.7 – це збільшений фрагмент рис. 3.3, виділений тут жовтим овалом (друга заборонена зона). На рис. 3.8 та ж зона і в тому ж масштабі наведена для компактної структури, яка збуджується зосередженим джерелом. Показана так, як вона виглядає в шести різних точках спостереження $g_1 \div g_6$.

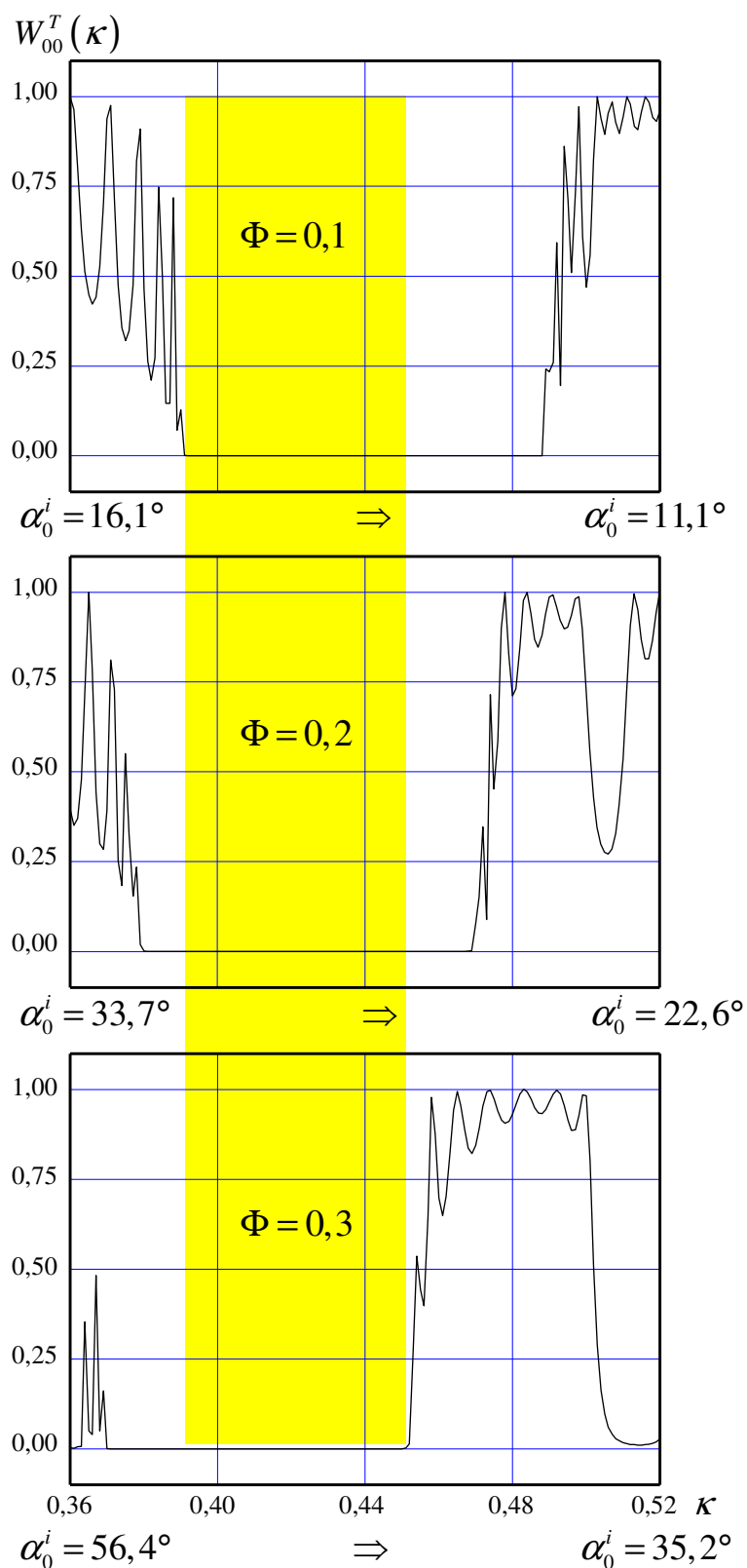


Рисунок 3.5 – H -поляризація поля. «Дрейф» забороненої зони I за зміни параметра Φ (за зміни кута падіння α_0^i первинної плоскої хвилі)

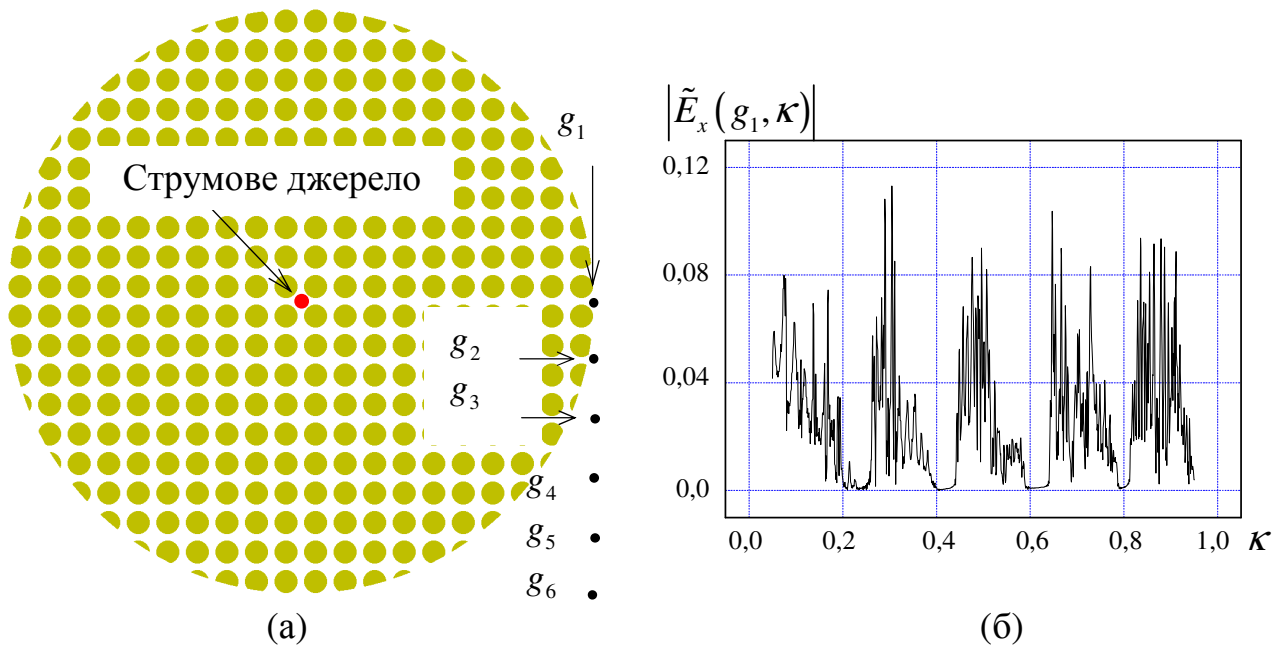


Рисунок 3.6 – Збудження кристала імпульсом струму. (а) Геометрія структури; (б) спектральні амплітуди E_x -компоненти поля в точці спостереження $g = g_1$

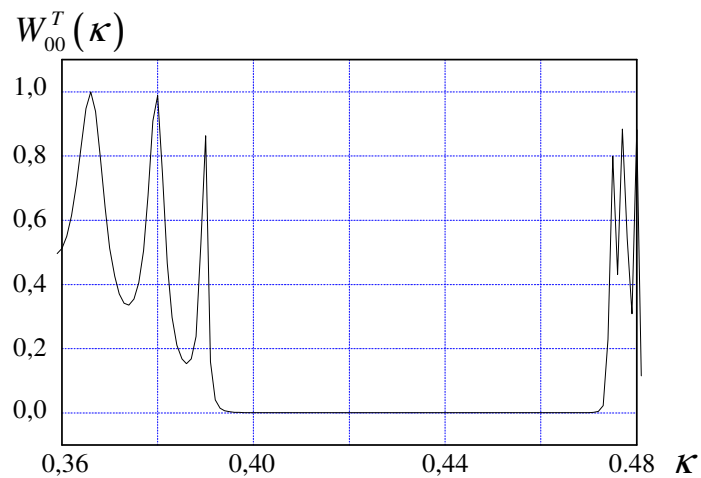


Рисунок 3.7 – Друга заборонена зона кристала, обмеженого за товщиною

Дані, зображені на рис. 3.6, рис. 3.8 та рис. 3.9, отримані під час розв'язку задачі (3.2), поле $U(g, \tau)$ породжується імпульсом струму $F(g, \tau) = G(g)F_1(\tau)$, $G(g) = \chi[r - |g - g_0|]$. Точка g_0 розташована в центрі кристала, $2\pi r/l = 0,65$, $l = l_y = l_z$. Параметри функції $F_1(\tau)$ ті ж, що і в (3.3).

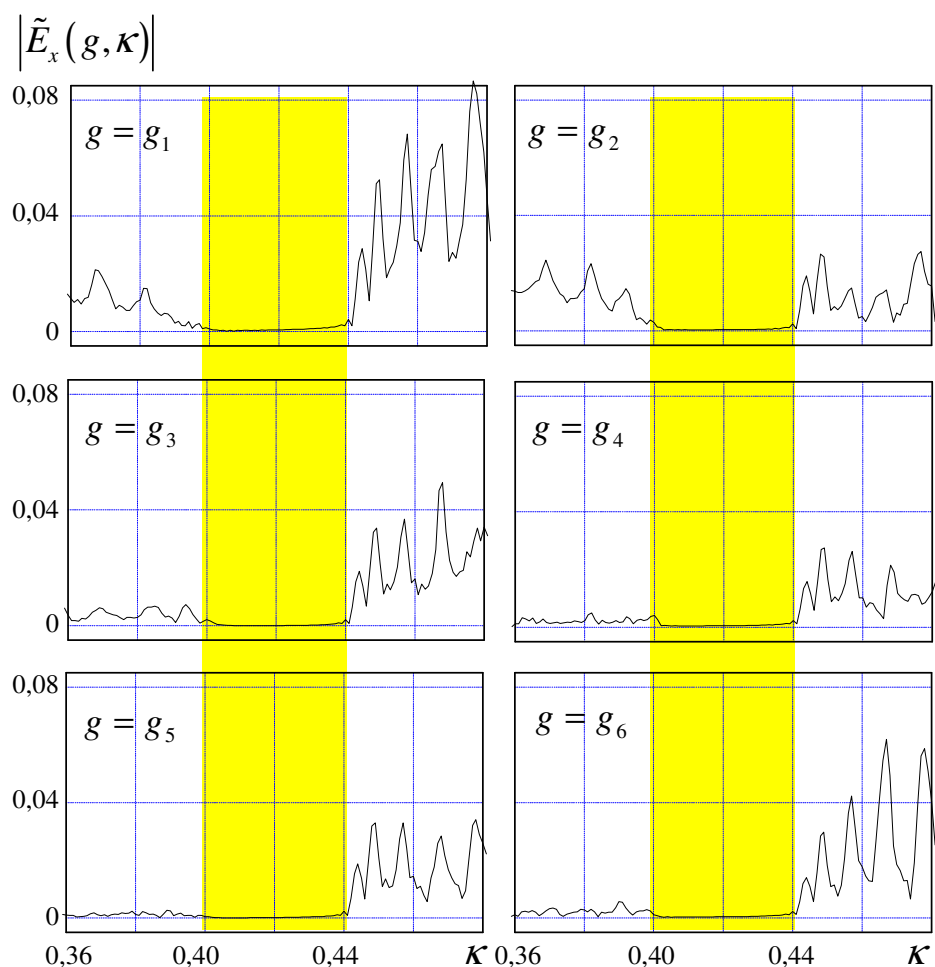


Рисунок 3.8 – Друга заборонена зона обмеженого кристала. Спектральні амплітуди E_x -компоненти поля в точках спостереження $g_1 \div g_6$

Поле $U(g, \tau)$ після виключення джерела в момент часу $\tau = 300$ формується великою кількістю вільних слабозгасних коливань, що відповідають різним власним частотам $\bar{\kappa} = \text{Re } \bar{\kappa} + i \text{Im } \bar{\kappa}$, $0,05 \leq \text{Re } \bar{\kappa} \leq 0,95$, $\text{Im } \bar{\kappa} < 0$. Суперпозиція цих коливань спричиняє вельми динамічні зміни у просторовому розподілі значень $U(g, \tau)$, $g \in Q_L$ – структура, виправдовуючи свою назву «кристал», породжує дивовижні за красою картини, які практично не повторюються (рис. 3.9).

Заборонені зони компактного кристала, збігаючись, взагалі, за характером розподілу на осі частот із забороненими зонами кристала, обмеженого за товщиною (див. рис. 3.3 та рис. 3.6–рис. 3.8), вужче останніх і не для всіх

значень κ з відповідних інтервалів дозволяють повністю погасити в кристалі збурення, що наводиться. Цю обставину необхідно враховувати при створенні пристроїв різного типу, ефективна робота яких забезпечується існуванням заборонених зон у фотонних структурах.

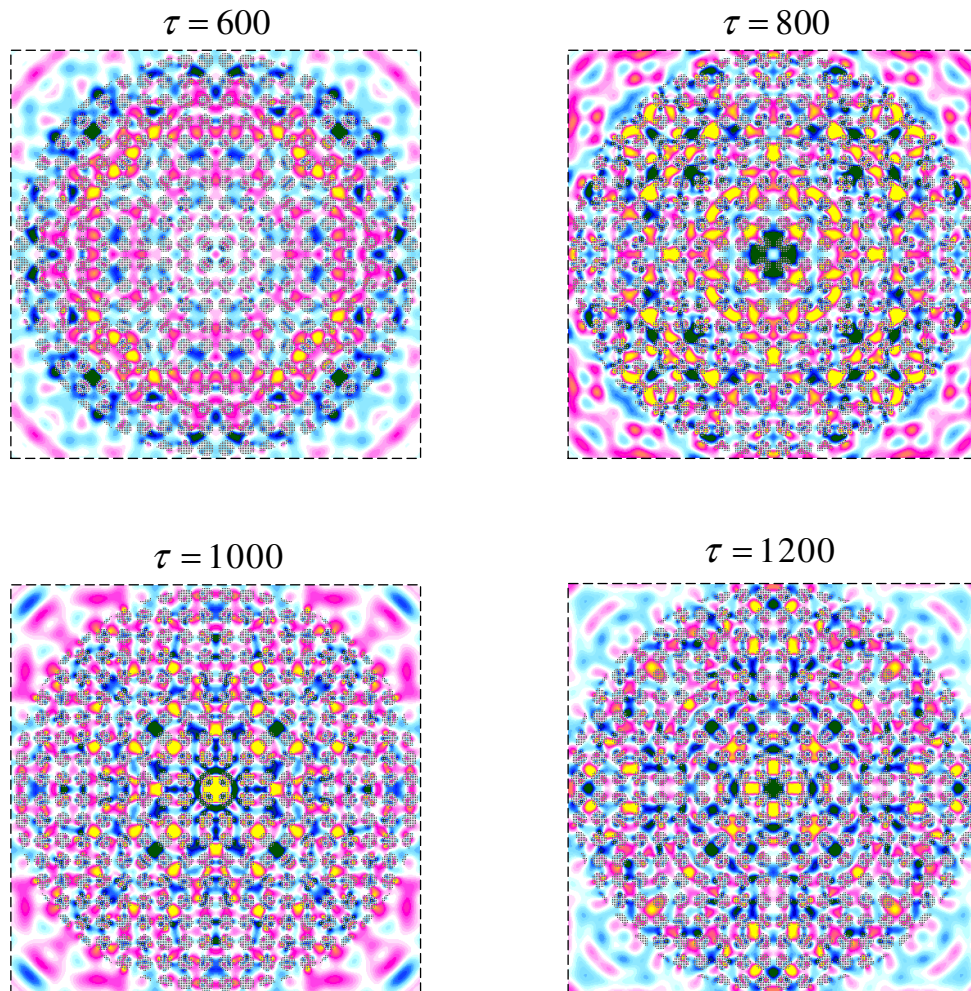


Рисунок 3.9 – Вільні (після вимикання джерела) коливання поля в компактному кристалі, збуджені імпульсом струму $F(g, \tau)$. Розподіл значень $E_x(g, \tau)$,

$$g \in Q_L \text{ в різні моменти часу } \tau$$

3.3 Резонансні порожнини в компактних фотонних кристалах

Утворимо в компактному кристалі, що містить 400 (20×20) діелектричних циліндрів, прямокутну порожнину (рис. 3.10) і збудимо її

струмовим джерелом $F(g, \tau) = G(g)F_1(\tau)$, $G(g) = \chi[R - |g - g_0|]$, $2\pi R/l = 0,65$, $\tilde{\kappa} = 0,435$, $\Delta\kappa = 0,035$, $\tilde{T} = 400$, $\bar{T} = 800$. Імпульс $F_1(\tau)$ окупує смугу частот $0,4 \leq \kappa \leq 0,47$, яка повністю знаходиться в другій забороненій зоні періодичного кристала (рис. 3.7) та повністю перекриває другу заборонену зону $0,4 \leq \kappa \leq 0,44$ круглого в поперечному перерізі компактного кристала (рис. 3.8).

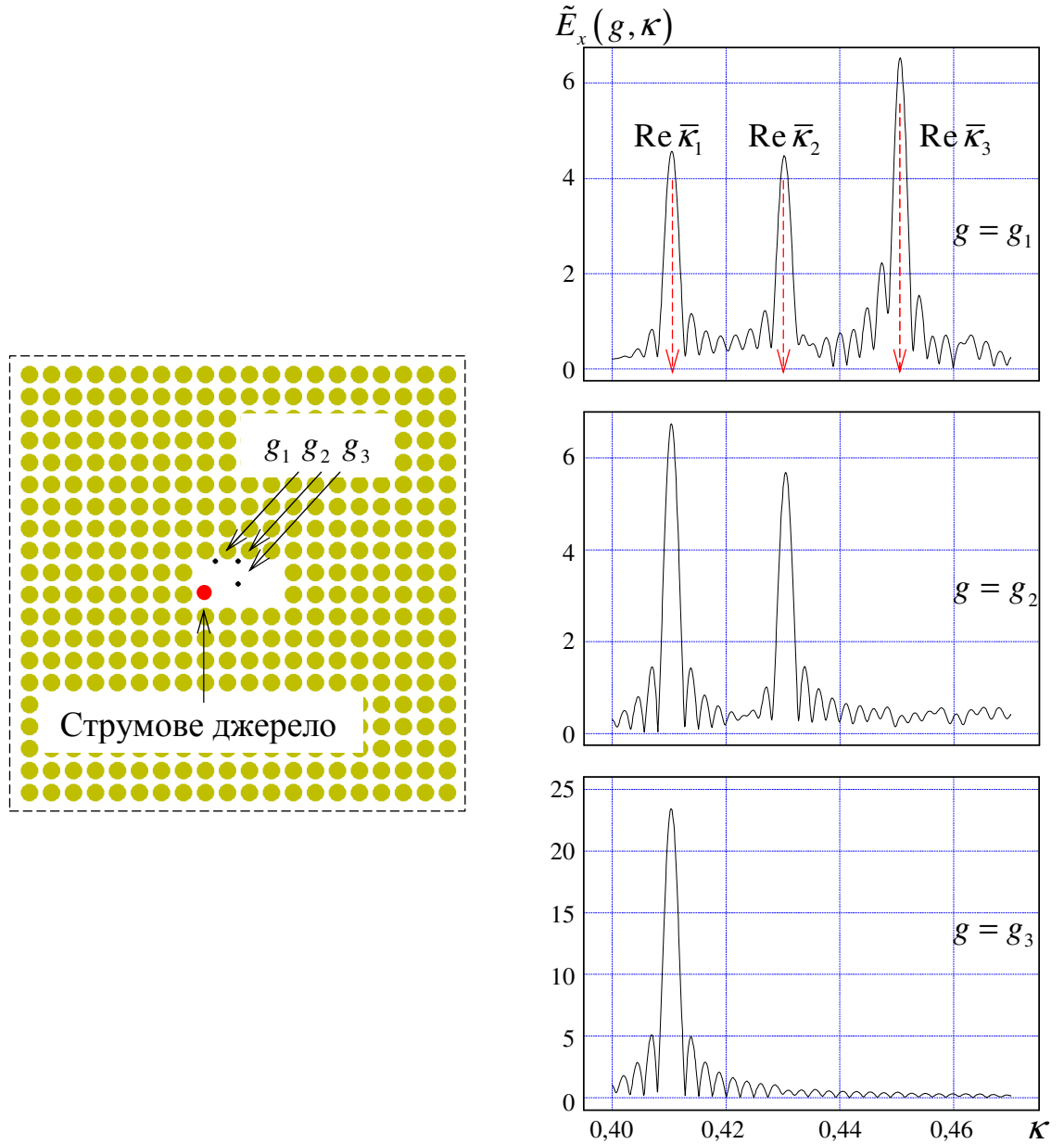


Рисунок 3.10 – Визначення власних частот резонансної порожнини в компактному фотонному кристалі

Скориставшись результатами робіт [79, 80, 87] і вивчивши поведінку спектральних амплітуд $|\tilde{U}(g, \kappa)|$ поля $U(g, \tau)$, $0 \leq \tau \leq 3000$ в точках спостереження $g_1 \div g_3$ (рис. 3.10), приходимо до висновку про можливість існування в порожнині кристала високодобротних вільних коливань поля на комплексних власних частотах $\bar{\kappa}_j$, $j=1,2,3$, реальні частини яких дорівнюють $\text{Re } \bar{\kappa}_1 = 0,4105$, $\text{Re } \bar{\kappa}_2 = 0,4305$ та $\text{Re } \bar{\kappa}_3 = 0,4505$. Далі, збуджуючи резонатор вузькосмуговим гаусовим імпульсом

$$F(g, \tau) = G(g) \exp \left[-(\tau - \tilde{T})^2 / 4\tilde{\alpha}^2 \right] \cos \left[\tilde{\kappa}(\tau - \tilde{T}) \right] \chi(\bar{T} - \tau) = G(g) F_2(\tau);$$

$$\tilde{\kappa} = \text{Re } \bar{\kappa}_j, \quad j=1,2,3, \quad \tilde{\alpha} = 100, \quad \tilde{T} = 400, \quad \bar{T} = 800,$$
(3.4)

визначаємо конфігурацію поля вільних коливань. На останньому кроці (рис. 3.11) розташовуємо центр g_0 джерела (3.4) та точку спостереження g в пучності поля кожного коливання й оцінюємо його добротність за поведінкою функцій $U(g, \tau)$ на часовому інтервалі $\bar{T} \leq \tau \leq T$ (режим вільних коливань).

Коливання H_{031} та H_{012} , яким відповідають власні частоти $\bar{\kappa}_1$ та $\bar{\kappa}_2$, мають практично нескінченну добротність (рис. 3.11). Це очікуваний результат, оскільки величини $\kappa = \text{Re } \bar{\kappa}_1$ та $\kappa = \text{Re } \bar{\kappa}_2$ лежать в забороненій зоні компактного кристала. Реальна частина власної частоти $\bar{\kappa}_3$, що відповідає коливанню H_{022} , лежить за межами забороненої зони компактного кристала. Напруженість поля цього коливання спочатку спадає через втрати на випромінювання (рис. 3.11), а потім незначно зростає за рахунок «підживлення» іншим вільним коливанням, поле якого лише частково проникає в резонансну порожнину, а реальна частина власної частоти мало відрізняється від $\text{Re } \kappa_3$.

Обговоримо тепер важливе для застосувань питання щодо можливості використання резонансної порожнини в кристалі як накопичувача енергії компресора, що формує потужні короткі радіоімпульси [88-90].

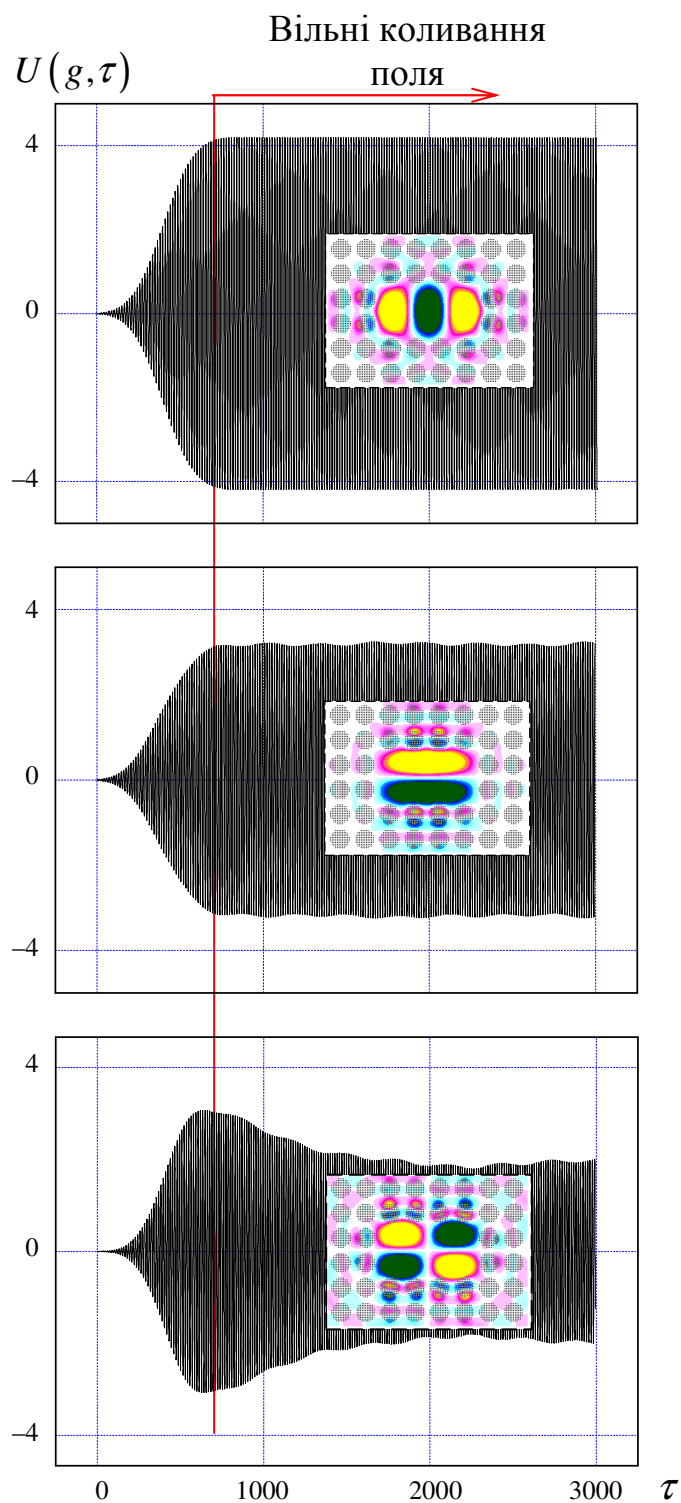


Рисунок 3.11 – Визначення конфігурації поля і добротності вільних коливань в резонансній порожнині

Геометрія накопичувача і живильного хвильоводу, розташування токового джерела і точок спостереження зображені на рис. 3.12. Джерело

$$F(g, \tau) = G(g)P(\tau)\cos[\tilde{\kappa}(\tau - \tilde{T})] = G(g)F_3(\tau); \quad 2\pi R/l = 1,1, \quad (3.5)$$

$$\tilde{\kappa} = 0,40972, \quad \tilde{T} = 1, \quad P(\tau): 0,1 - 5 - 6995 - 7000$$

породжує в каналі, що проходить зліва від резонансної порожнини, квазімонохроматичну H_{01} -хвилю, зниження напруженості поля якої при русі від точки g_1 до точки g_2 обумовлено, в основному, відбором енергії, що накопичується в резонаторі.

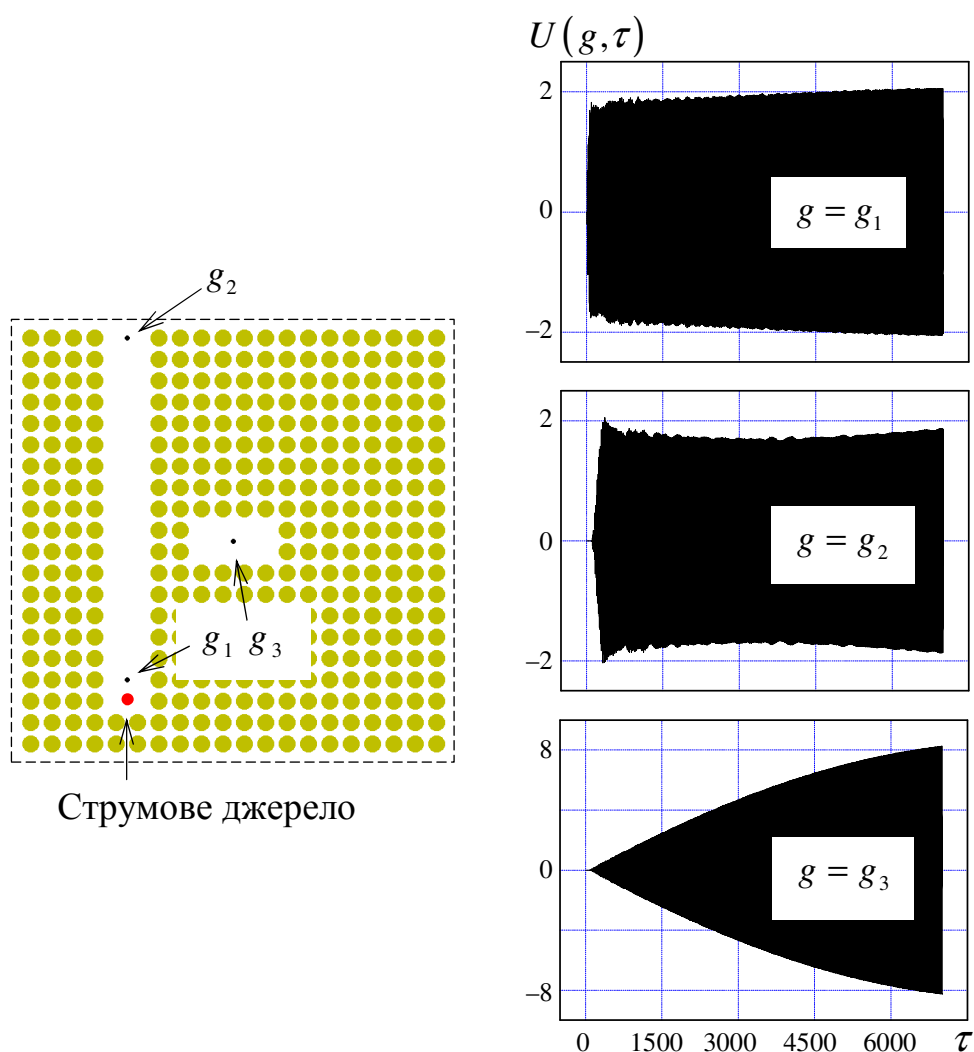


Рисунок 3.12 – До оцінки ефективності накопичення енергії в резонансній порожнині компактного кристала

Тут $P(\tau): \tau_1 - \tau_2 - \tau_3 - \tau_4$ – трапецієподібна обвідна імпульсу (3.5), що дорівнює нулю, коли $0 \leq \tau \leq \tau_1$, $\tau \geq \tau_4$ та одиниці при $\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3$; $\tilde{\kappa} = \text{Re } \bar{\kappa}$; $\bar{\kappa}$ – власна частота робочого коливання в накопичувачі (H_{031} -коливання). Значення $\text{Re } \bar{\kappa}$ ненабагато, але відрізняється від того, яке було визначено вище. Причина полягає в ненульовому електродинамічному зв'язку резонансної порожнини і хвилевідного каналу. Врахування відповідних поправок вкрай важливе, тому що навіть дуже невелике відхилення центральної частоти $\tilde{\kappa}$ збуджуючого сигналу від реальної частини власної частоти робочого коливання призводить до зриву процесу накопичення енергії – часові інтервали, на яких напруженість поля в накопичувачі зростає, змінюються такими ж за тривалістю інтервалами, на яких напруженість поля спадає до попереднього рівня. Період коливань обернено пропорційний величині $|\tilde{\kappa} - \text{Re } \bar{\kappa}|$ [88, 89].

Судячи з фрагментів рис. 3.12, що відповідають точкам спостереження $g = g_2$ та $g = g_3$, два шари діелектричних циліндрів, які розділяють резонатор та хвилевід, помітно послаблюють їх зв'язок і не дозволяють побудувати оптимальний розв'язок задачі накопичення. Ефективність накопичення (її величину визначаємо за швидкістю зміни значень $U(g, \tau)$, $g = g_2$), невисока й на початку процесу, починає знижуватися вже після значень $\tau = 3750$, напруженість поля в накопичувачі після завершення часу спостереження лише в чотири рази перевищує напруженість поля живильної хвилі.

Пересунувши живильний хвилевід на один шар діелектричних циліндрів ближче до резонатора, ми помітно змінюємо динаміку процесу накопичення на краще: ефективність накопичення залишається досить високою в усі моменти часу спостереження, а напруженість поля в накопичувачі при $\tau = 7000$ вже в шість разів вище напруженості поля живильної хвилі. Відповідні дані зображені на рис. 3.13. Експеримент, у рамках якого вони були отримані, практично ідентичний експерименту, результати якого обговорювалися вище. Єдина суттєва відмінність полягала в тому, що центральна частота квазімонохроматичної хвилі, яка породжується джерелом, в цьому випадку

дорівнювала $\tilde{\kappa}=0,40665$ – зміна обумовлена зближенням резонатора і живильного хвильоводу.

Відзначимо, що метод точних поглинаючих умов дозволяє строго оцифрувати як характеристики процесу накопичення, що згадувалися раніше, так і всі інші характеристики, пов'язані з формуванням і випромінюванням коротких потужних радіоімпульсів [87-90].

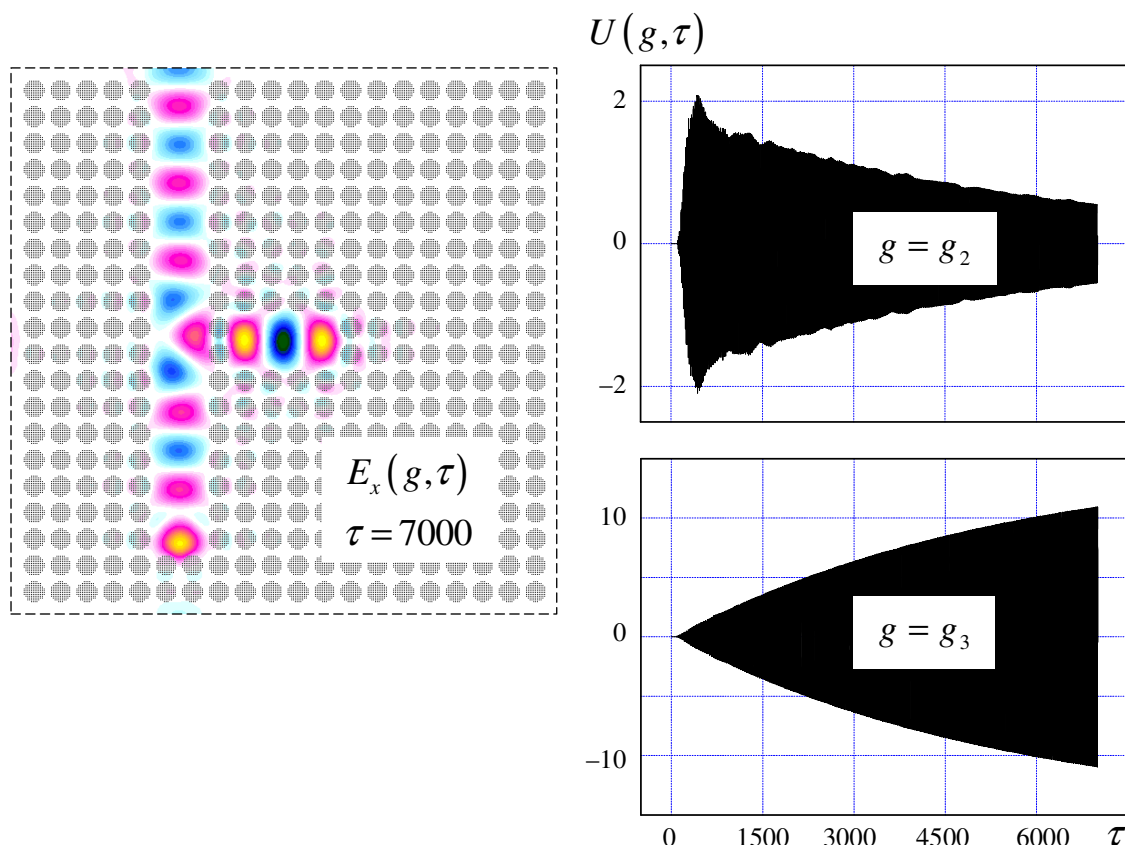


Рисунок 3.13 – Накопичення енергії при збільшенні зв'язку резонатора і живильного хвильоводу

3.4 Хвильовідні елементи

Витягуючи з кристала ряд діелектричних циліндрів, можна створювати різного типу хвильовідні елементи, які розраховані на роботу в одній із заборонених зон фотонної структури. З елементами, загальним для яких є живильний хвильовід, зображений на рис. 3.14, ми провели кілька

обчислювальних експериментів. Ці результати коротко представлено нижче.

Збудивши відрізок регулярного хвильоводу H_{01} -хвилею

$$U_1^i(g, \tau): v_{11}(z \in \Gamma_1, \tau) = F_1(\tau); \quad \tilde{\kappa} = 0,42, \quad \Delta k = 0,015, \quad \tilde{T} = 400, \quad \bar{T} = 800, \quad (3.6)$$

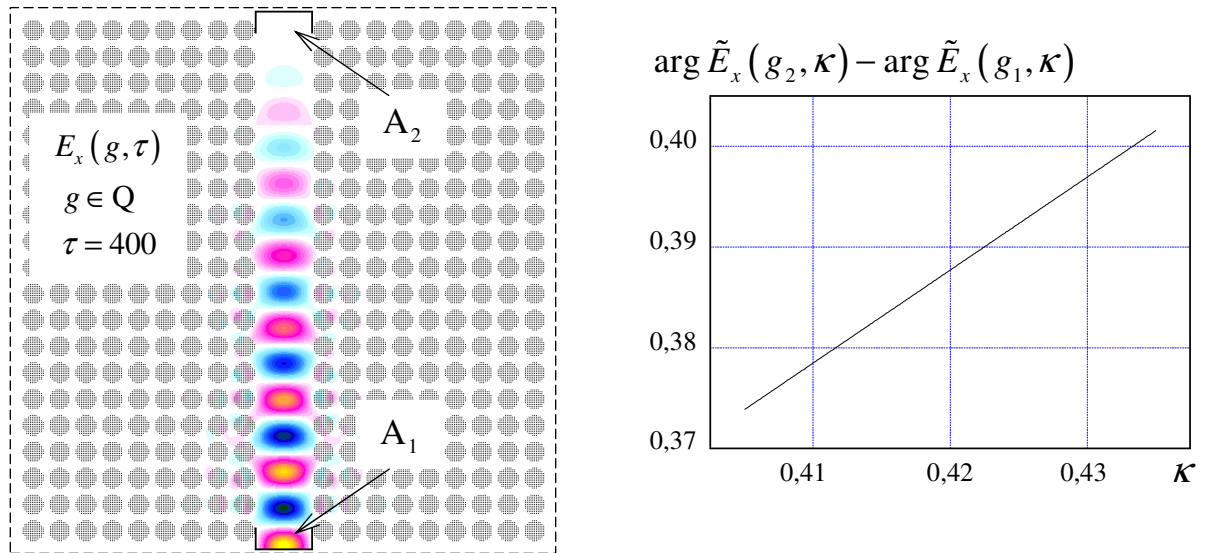


Рисунок 3.14 – Відрізок регулярного хвильоводу в компактному фотонному кристалі. Збудження імпульсною H_{01} -хвилею (3.6)

яка набігає з плоскопаралельного хвильоводу A_1 , і прийнявши сигнал, що пройшов через кристал, в хвилевід A_2 ($a_1 = a_2 = a$, $2\pi a/l = 13,0$), ми знаходимо, що:

- хвильоводи A_j в смузі частот $0,405 \leq \kappa \leq 0,435$, яку займає імпульс $F_1(\tau)$, практично ідеально узгоджуються з хвильоводом у фотонному кристалі;
- збуджена в кристалі H_{01} -хвиля проходить відстань між A_1 та A_2 без втрат;
- стала поширення $\beta_1^{\text{crist}}(\kappa)$ H_{01} -хвилі в кристалі змінюється в смузі $0,405 \leq \kappa \leq 0,435$ від значення $\beta_1^{\text{crist}}(0,405) = 0,374$ до значення $\beta_1^{\text{crist}}(0,435) = 0,401$ (рис. 3.14; для хвильоводів A_j $\beta_n(\kappa) = \sqrt{\kappa^2 - (nl/2a)^2}$,

$\operatorname{Re} \beta_n \geq 0$ та $\beta_1(0,405)=0,325$, $\beta_1(0,435)=0,362$);

- перші дві точки відсічки H_{0n} -хвиль в кристалі дорівнюють $\kappa_1^{\text{cryst}} \approx 0,168$ та $\kappa_2^{\text{cryst}} \approx 0,336$.

Під час розрахунку $\beta_1^{\text{cryst}}(\kappa)$ та точок відсічки κ_1^{cryst} вважалося, що поле $\tilde{U}(g, \kappa)$ монохроматичної H_{01} -хвилі в кристалі є подібним до поля H_{01} -хвилі в плоскопаралельному хвилеводі та описується функцією $A(\kappa) \exp[i\beta_1^{\text{cryst}}(\kappa)(2\pi z/l)] \mu_1^{\text{cryst}}(y)$, $\beta_1^{\text{cryst}}(\kappa) = \sqrt{\kappa^2 - (\kappa_1^{\text{cryst}})^2}$. Зрозуміло, що в цьому випадку різниця фаз $\arg \tilde{E}_x(g_2, \kappa) - \arg \tilde{E}_x(g_1, \kappa)$ в точках $g_2 = \{y, z_2\}$ та $g_1 = \{y, z_1\}$ на осі хвилевода таких, що $z_2 - z_1 = l/2\pi$, визначає величину $\beta_1^{\text{cryst}}(\kappa)$.

З урахуванням наданих вище даних ми побудували геометрію прозорої хвилевідної неоднорідності (рис. 3.15; симетричне розширення), яка, якщо продовжити аналогію з класичними хвилеводами [60], могла б повністю відбивати набіжну H_{01} -хвилю в окремих точках діапазону $0,405 \leq k \leq 0,435$. Необхідна для цього умова (в розширенні «заперті» вищі H_{0n} -хвилі, що поширюються тут) виконана, оскільки структура є симетричною, й антисиметрична H_{02} -хвиля (передбачувана точка відсічки $\kappa_2^{\text{cryst}} \approx 0,336$) не збуджується в її зонах відбиття та проходження симетричною H_{01} -хвилею.

Результати експерименту підтвердили наші очікування: монохроматична H_{01} -хвиля практично повністю відбивається прозорою неоднорідністю на частоті $\kappa = \operatorname{Re} \bar{\kappa} = 0.4172$, рис. 3.15. Тут $\bar{\kappa}$ – комплексна власна частота, що відповідає досить добротному H_{052} вільному коливанню поля в розширенні.

Ці деталі з'ясовуються (див., наприклад, [79, 80, 87]) при збудженні неоднорідності квазімонохроматичною імпульсною хвилею

$$U_1^i(g, \tau): v_{11}(z \in \Gamma_1, \tau) = F_3(\tau); \quad \tilde{\kappa} = 0,4172; \quad \tilde{T} = 1; \quad P(\tau): 0,1 - 5 - 995 - 1000. \quad (3.7)$$

Конфігурація поля коливання, що відповідає за реалізацію режиму повного відбиття набіжної хвилі, досить добре промальовується вже для $\tau > 500$ (див. лівий фрагмент рис. 3.15).

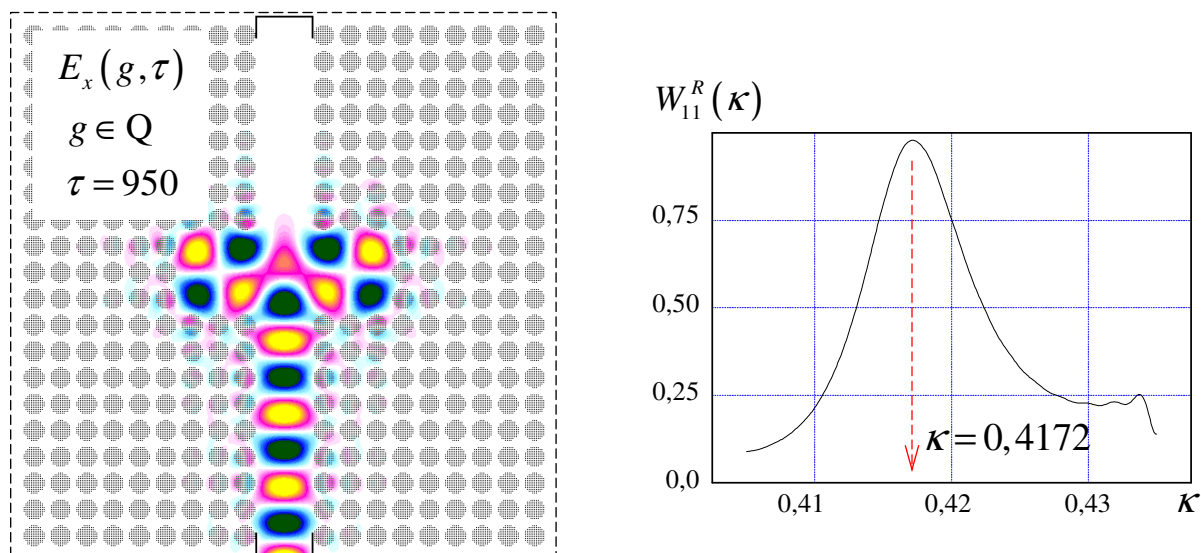


Рисунок 3.15 – Ефект повного відбиття H_{01} -хвилі симетричним розширенням хвилеводу

Ефекти повного або майже повного відбиття H_{01} -хвиль реалізуються також на T -розгалуженнях, геометрія й амплітудно-частотні характеристики яких зображені на рис. 3.16 та рис. 3.17. Режими з досить високим рівнем $W_{11}^R(\kappa)$ тут чергуються з режимами, під час реалізації яких більша частина енергії, що підводиться до розгалуження, йде в його бічні плечі, та з режимами, що відповідають значенням $W_{11}^R(\kappa) \approx 0,33$, коли енергія, що підводиться, в рівних частках розподіляється між усіма трьома хвилевідними каналами вузла.

Можна досить впевнено говорити, що T -розгалуження в кристалі також є частотно-селективним елементом, граничні характеристики якого формуються під впливом резонансних (вільних) коливань поля, що збуджуються в області, що з'єднує всі його плечі. Реальна частина комплексних власних частот $\bar{\kappa}$ цих коливань дуже близька до тих частот κ , на яких відповідні режими реалізуються. Ці частоти й вибираються як центральна частота

квазімонохроматичного сигналу (3.7), що збуджує, при визначенні конфігурації поля коливань і їхньої добротності (див. лівий фрагмент рис. 3.16, де $\tilde{\kappa}=0,4061$ та рис. 3.17, де $\tilde{\kappa}=0,4206$). Для цього потрібно дочекатися вимкнення джерела й простежити за тим, як змінюються величини $E_x(g, \tau)$, $g \in Q$ з ростом τ [80, 87].

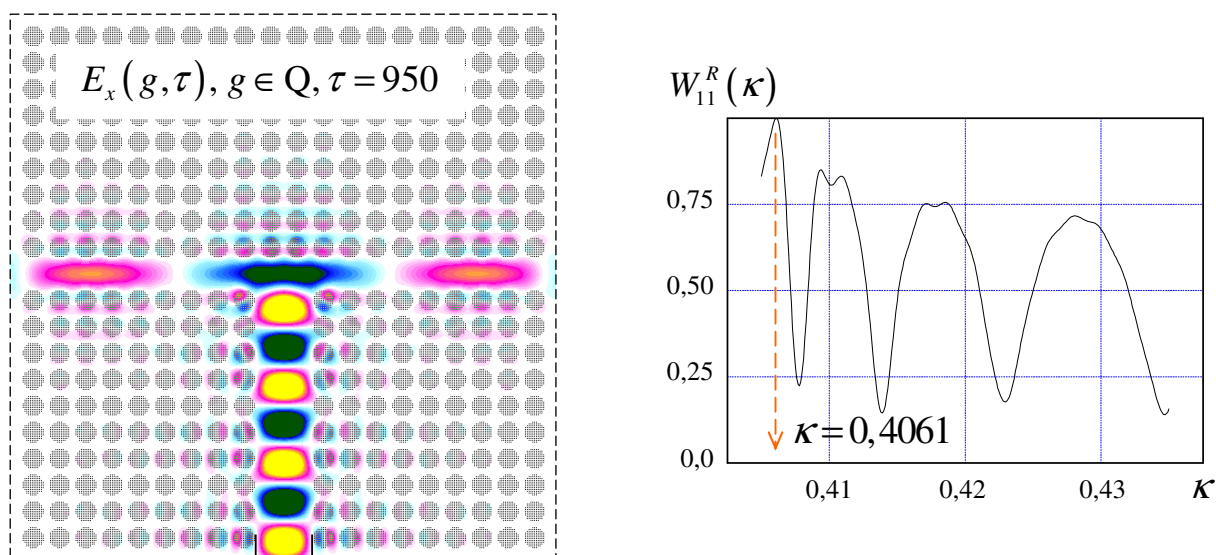


Рисунок 3.16 – Характеристики T -розгалуження з вузькими бічними плечима

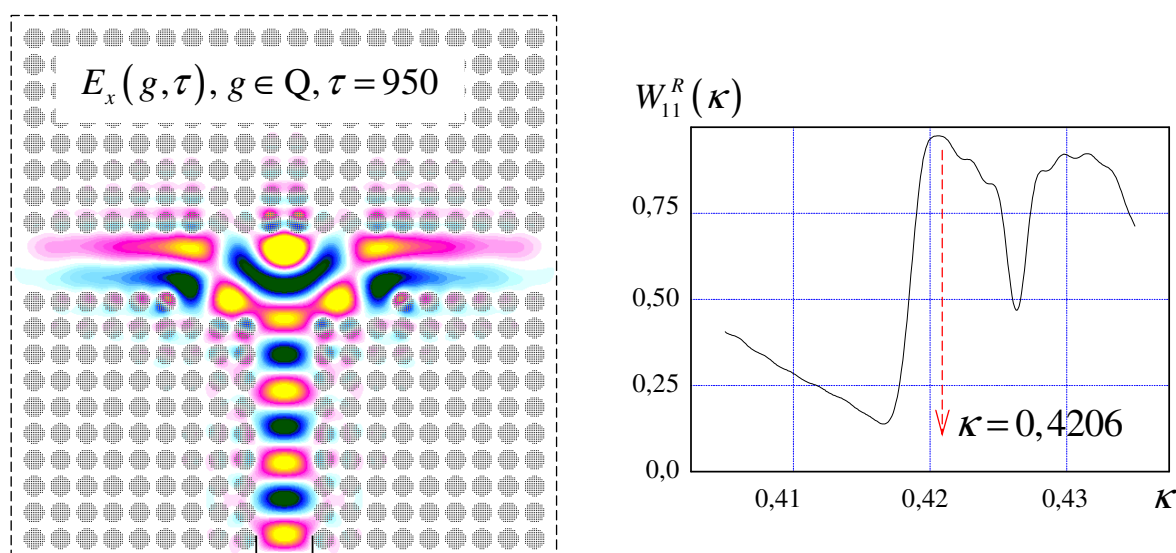


Рисунок 3.17 – T -розгалуження з резонансним розширенням області зв'язку

Конфігурація поля коливання, що відповідає за той чи інший резонансний

режим, часто проявляється ще до вимкнення джерела (рис. 3.15 та 3.17). Для цього необхідно, щоб в смугу, яка охоплюється збуджуючим імпульсом, не потрапили частоти, що відповідають іншим досить добротним вільним коливанням поля.

3.5. Радіаційні ефекти в смугах пропускання кристала

При збудженні хвилеводу (рис. 3.14) надширокосмуговою імпульсною H_{01} -хвилею, частотний спектр якої охоплював зону пропускання компактної структури між її другою та третьою забороненими зонами, ми зафіксували поширення хвиль в кристалі, динаміка фронтів яких дозволяла ототожнити їх із хвилями, що виникають при зворотному випромінюванні Вавілова-Черенкова [55]. Вивчивши спектральний склад цих хвиль після їх виходу з кристала, ми визначили частоти, на яких їхні амплітуди максимальні, й провели серію експериментів із визначення радіаційних характеристик фотонної структури (рис. 3.14) в малому околі цих частот.

Результати одного з таких експериментів зображено на рис. 3.18. Кристал збуджується вузькосмуговим імпульсом (3.7) з центральною частотою $\tilde{k} = 0,4441$. Це дозволяє охопити при аналізі смугу частот $0,439 \leq \kappa \leq 0,449$. Початок смуги збігається з правою межею другої забороненої зони компактної структури, тому ефективність випромінювання $\eta(\kappa)$ тут дуже мала.

На частоті $\kappa = \tilde{k}$ ефективність випромінювання $\eta(\kappa) \approx 0,62$ й більша частина випроміненої енергії припадає на хвилі, що поширюються у вільному просторі в напрямках $\phi = -45^\circ$ та $\phi = -135^\circ$. Це хвилі випромінювання Вавілова-Черенкова і це зворотні хвилі – під час перетину зрізаної під кутами 45° та 135° нижньої межі кристала вони піддаються зворотному заломленню.

Цей факт добре ілюструє рис. 3.19. Умови експерименту тут такі самі, що й у випадку рис. 3.18, але всі межі кристала – координатні. Зворотне заломлення спричиняє «зіткнення» хвиль, що випромінюються, під нижньою

межею структури та до формування досить потужних пелюсток діаграми спрямованості, які направлені вгору симетрично осі z під кутами $\phi \approx 65^\circ$ та $\phi \approx 115^\circ$.

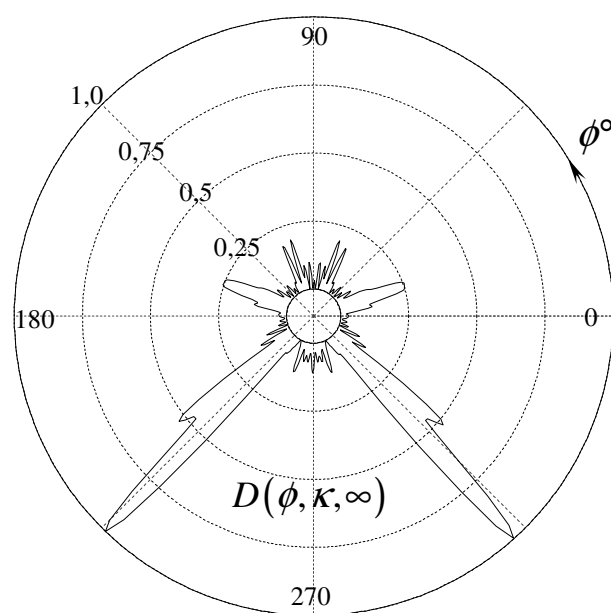
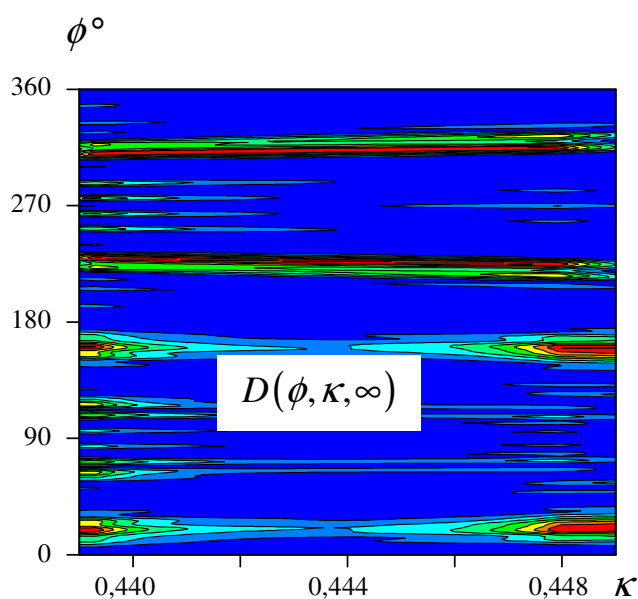
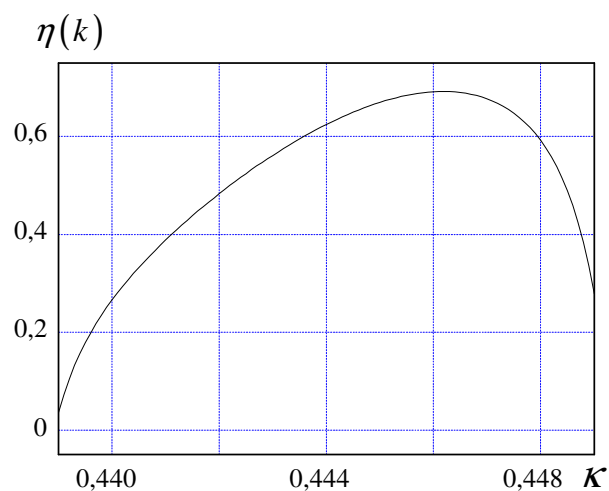
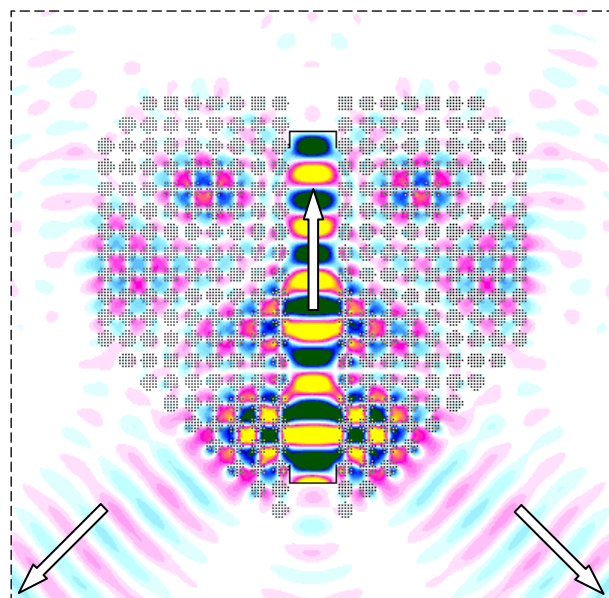


Рисунок 3.18 – Просторовий розподіл значень $E_x(g, \tau)$, $\tau=600$. Ефективність і діаграма спрямованості випромінювання в смузі частот. Діаграма спрямованості на частоті $\kappa=0,4441$

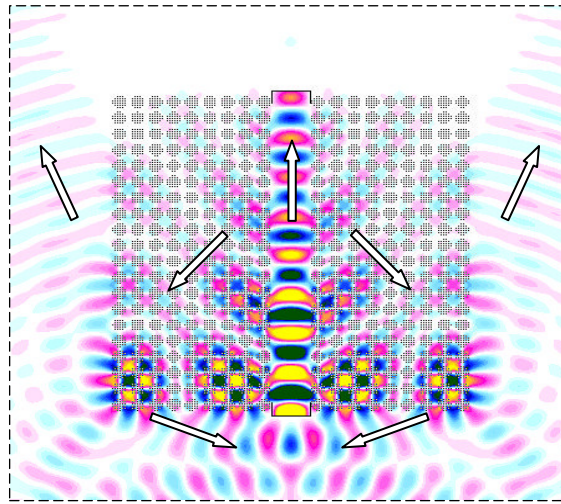


Рисунок 3.19 – Фокусування поля при зворотному заломленні на плоскій межі кристала

3.6 Аналітичні підстави для побудови спектральної теорії

2-D фотонних кристалів

2-D фотонним кристалом зазвичай називають нескінченну та однорідну в напрямку x та періодичну в напрямках y та z діелектричну або металодіелектричну структуру [30, 52] (див., наприклад, рис. 3.20: l_y та l_z – довжини періодів структури в напрямках y та z ; $S = S_x \times (|x| \leq \infty)$ та $S^{\varepsilon, \sigma} = S_x^{\varepsilon, \sigma} \times (|x| \leq \infty)$ – досить гладкі поверхні ідеальних провідників і поверхні, на яких матеріальні параметри середовища поширення хвиль, функції $\varepsilon(g)$ та $\sigma(g)$, зазнають розриву).

Електромагнітні хвилі, що породжуються в такій структурі квазіперіодичними струмовими джерелами

$$F(g, k) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} f_{m, n}(k) \mu_{m, n}(g); \quad g \in \mathbb{R}^2, \quad \mu_{m, n}(g) = (l_y l_z)^{-1/2} \exp[i(\alpha_m y + \beta_n z)],$$

$$\alpha_m = 2\pi(\Phi_y + m)/l_y, \quad \beta_n = 2\pi(\Phi_z + n)/l_z$$

(3.8)

і поширюються тут в напрямках, що перпендикулярні осі x , описуються розв'язками $U(g, k, \Phi_y, \Phi_z)$ крайової задачі [1, 32]

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \bar{\epsilon}(g) \right] U(g, k, \Phi_y, \Phi_z) = F(g, k); \quad g = \{y, z\} \in \overline{G \setminus \text{int } S_x} \\ \vec{E}_{tg}(q, t) \quad \text{і} \quad \vec{H}_{tg}(q, t) \quad \text{безперервні під час перетину} \quad S^{\epsilon, \sigma}, \\ \vec{E}_{tg}(q) \big|_{q=\{x, y, z\} \in S} = 0, \quad U \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} \right\} (l_y, z, k, \Phi_y, \Phi_z) = e^{2\pi i \Phi_y} U \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} \right\} (0, z, k, \Phi_y, \Phi_z), \\ U \left\{ \frac{\partial U}{\partial z} \right\} (l_z, z, k, \Phi_y, \Phi_z) = e^{2\pi i \Phi_z} U \left\{ \frac{\partial U}{\partial z} \right\} (y, 0, k, \Phi_y, \Phi_z). \end{array} \right. \quad (3.9)$$

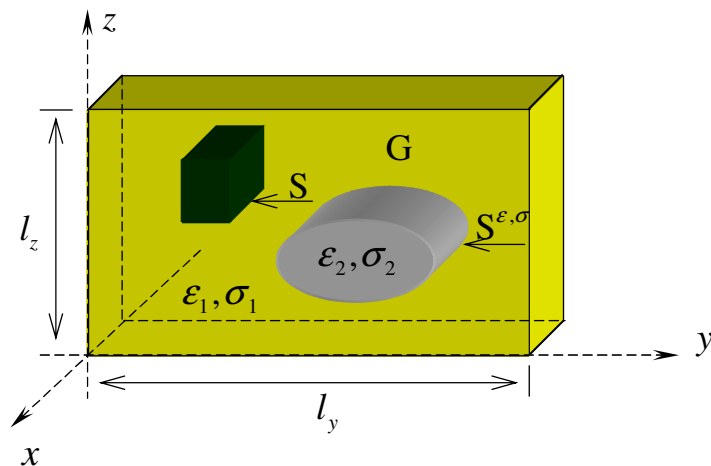


Рисунок 3.20 – Переріз однієї з комірок 2-D фотонного кристала двома паралельними площинами $x = const$

Тут $U(g, k) = E_x(g, k)$ у випадку E -поляризації поля (TE -хвилі: $\partial/\partial x \equiv 0$, $H_x = E_y = E_z = 0$, $ikH_y = \eta_0^{-1} \partial U / \partial z$, $-ikH_z = \eta_0^{-1} \partial U / \partial y$) та $U(g, k) = H_x(g, k)$ у випадку H -поляризації (TM -хвилі: $\partial/\partial x \equiv 0$, $E_x = H_y = H_z = 0$, $-ik\epsilon\eta_0 E_y + \sigma E_y + j_y = \partial U / \partial z$, $-ik\epsilon\eta_0^{-1} E_z + \sigma E_z + j_z = -\partial U / \partial y$); $\vec{E}_{tg}$, $\vec{H}_{tg}$, E_x , H_x і т.д. – компоненти векторів напруженості електричного ($\vec{E}(g, k)$) й

магнітного ($\vec{H}(g, k)$) полів; $G = \{g : 0 < y < l_y, 0 < z < l_z\}$; $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число, λ – довжина електромагнітної хвилі у вільному просторі; $\vec{\varepsilon}(g) = \varepsilon(g) + i\sigma(g)\eta_0/k$ – кусково-неперервна (у випадку E -поляризації) або кусково-стала (в H -випадку) функція координат; R^2 – площа yOz ; $\text{Im}\Phi_y = \text{Im}\Phi_z = 0$ та $|\Phi_y| \leq 0,5$, $|\Phi_z| \leq 0,5$. Залежність даних процесів від часу визначається множником $\exp(-ikt)$.

Спектральна теорія 2-D фотонних кристалів вивчає особливості аналітичного продовження розв'язків $U(g, k, \Phi_y, \Phi_z)$ задачі (3.9) в область комплексних значень хвильового числа k при фіксованих дійсних значеннях Φ_y та Φ_z або в область комплексних значень Φ_y та Φ_z при фіксованому дійсному значенні k . Відповідні результати (якісні та кількісні характеристики спектрів вільних коливань поля у фотонних кристалах та спектрів їхніх власних хвиль) вкрай важливі для коректного фізичного аналізу процесів поширення й розсіювання електромагнітних хвиль, необхідність в якому виникає при розв'язанні чималої кількості теоретичних та інженерних задач оптики, фотоніки та мікрохвильової електроніки.

Далі ми всюди вважаємо, що $\text{int} S_x = \emptyset$ (металеві включення відсутні). І тільки в кінці підрозділу 3.6.3 стисло прокоментуємо випадок із $\text{int} S_x \neq \emptyset$.

3.6.1 Канонічна функція Гріна

Ортонормована система функцій $\{\mu_{m,n}(g)\}_{n,m=-\infty}^{\infty}$ є повною в просторі $L_2(G)$ [91]. Це дозволяє нам представити розв'язок $U(g, k, \Phi_y, \Phi_z)$ задачі (3.9) нескінченним рядом

$$U(g, k, \Phi_y, \Phi_z) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} u_{m,n}(k) \mu_{m,n}(g). \quad (3.10)$$

Легко перевірити, що функція (3.10) задовольняє умовам квазіперіодичності (два останні рядки в (3.9)). Невідомі комплексні амплітуди $u_{m,n}(k)$ слід вибрати так, щоб задовольнити диференційному рівнянню задачі (3.9) й умовам, що накладаються на тангенційні компоненти поля, які визначаються функцією (3.10).

Нехай спочатку $\bar{\varepsilon}(g) \equiv 1$ (діелектричне середовище фотонного кристала має параметри вакууму). Тоді функція (3.10) буде розв'язком задачі (3.9), якщо тільки

$$(k^2 - \alpha_m^2 - \beta_n^2)u_{m,n} = f_{m,n}; \quad -\infty \leq m, n \leq \infty. \quad (3.11)$$

З (3.10) та (3.11) отримуємо

$$\begin{aligned} U(g, k, \Phi_y, \Phi_z) &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{f_{m,n}}{k^2 - \alpha_m^2 - \beta_n^2} \mu_{m,n}(g) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_{m,n}(g)}{k^2 - \alpha_m^2 - \beta_n^2} \int_G F(p, k) \mu_{m,n}^*(p) dp = \\ &= \int_G \left[\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_{m,n}(g) \mu_{m,n}^*(p)}{k^2 - \alpha_m^2 - \beta_n^2} \right] F(p, k) dp = \int_G G_0(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z) F(p, k) dp \end{aligned}$$

(* – знак комплексного спряження). Функцію

$$G_0(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_{m,n}(g) \mu_{m,n}^*(p)}{k^2 - \alpha_m^2 - \beta_n^2}, \quad p = \{y_p, z_p\} \in G \quad (3.12)$$

назвемо канонічною функцією Гріна задачі (3.9). Природні межі її аналітичного продовження на комплексні значення частотного параметра k або параметрів Φ_y, Φ_z визначають повні області варіації комплексних власних частот або власних сталих поширення в спектральних задачах, пов'язаних з аналізом вільно коливних полів або полів власних хвиль у фотонних кристалах [1, 3, 25, 32].

Спектральні задачі теорії 2-D фотонних кристалів отримуємо з (3.9), вважаючи $F(g, k) \equiv 0$. При фіксованих дійсних значеннях Φ_y та Φ_z приходимо до задачі на комплексні власні частоти $\bar{k}(\Phi_y, \Phi_z)$ та вільні коливання поля в кристалі $\bar{U}(g, \bar{k}, \Phi_y, \Phi_z)$, що їм відповідають. При фіксованому дійсному k приходимо до задачі на комплексні сталі поширення $\bar{\Phi}_y$ та $\bar{\Phi}_z$ власних хвиль кристала $\bar{U}(g, k, \bar{\Phi}_y, \bar{\Phi}_z)$. На практиці, під час розрахунку ізочастот періодичної структури для обраної смуги пропускання в координатах, пов'язаних із хвильовими векторами власних хвиль, або дисперсійних залежностей для скінченного числа таких хвиль (зазвичай, уздовж граничних відрізків частини зони Бріллюена, яка не приводиться), як правило, звертаються до першої з цих задач [30]. Цю задачу ми і розглянемо нижче, обмежившись одним з можливих випадків поляризації поля, а саме E -випадком або випадком TE -хвиль.

Продовжимо аналітично функцію $G_0(k) \equiv G_0(g, p, k) \equiv G_0(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z)$ з дійсних значень $k > 0$ на комплексні значення $k \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ – комплексна площина). Дотримуючись [92] та використовуючи зображення (3.12) неважко показати, що:

- при $g \neq p$ функція $G_0(k)$ голоморфна в $\mathbb{C}$, винятком є точки $k = \pm \lambda_{m,n}$, $\lambda_{m,n}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$;
- якщо $p \in G$ та $k \neq \pm \lambda_{m,n}$, то функція $G_0(g, p, k)$ неперервна по g в замиканні $\bar{G}$ області G , за винятком точки $g = p$, в околі якої $G_0(g, p, k) = O(\ln r^{-1})$, $r = \sqrt{(y - y_p)^2 + (z - z_p)^2} \rightarrow 0$;
- при $k \neq \pm \lambda_{m,n}$ перші похідні функції $G_0(g, p, k)$ по y та z неперервні в $\bar{G}$, за винятком точки $g = p$, в околі якої $\partial G_0(g, p) / \partial r = O(r^{-1})$, $r \rightarrow 0$;
- при $k \neq \pm \lambda_{m,n}$ $G_0(g, p, k)$ як функція змінної g задовольняє рівнянню $(\partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2 + k^2) G_0(g, p, k) = 0$ в усіх точках $g \in G$, що не збігаються з

точкою p ;

- $G_0(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z) = G_0(p, g, k, -\Phi_y, -\Phi_z) = G_0^*(g, p, -k^*, -\Phi_y, -\Phi_z)$;
- лишки $\text{Res}_{k=\pm\lambda_{m,n}} G_0(g, p, k) = \pm(2\lambda_{m,n})^{-1} \mu_{m,n}(g) \mu_{m,n}^*(p)$ визначають вільні

коливання поля в кристалі без матеріальних включень, цим коливанням відповідають власні частоти $\bar{k} = \pm\lambda_{m,n}$;

- якщо функція $F(g)$ обмежена в G , то функція $U(g, k, \Phi_y, \Phi_z) = \int_G G_0(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z) F(p) dp$, $k \neq \pm\lambda_{m,n}$ є розв'язком канонічної задачі (3.9) (задачі без матеріальних розсіювачів) та цей розв'язок має неперервні часткові похідні першого порядку в $\bar{G}$;

- якщо функція $F(g)$ має неперервні часткові похідні першого порядку в G , то функція $U(k, g, \Phi_y, \Phi_z)$, $k \neq \pm\lambda_{m,n}$ має неперервні часткові похідні до другого порядку включно.

3.6.2 Спектральна задача і функція Гріна фотонного кристала

Нехай множина Ω_k точок $\{\bar{k}_j\} \in \mathbb{C}$ таких, що для всіх $k \in \{\bar{k}_j\}$ однорідна (спектральна) задача

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \bar{\epsilon}(g) \right] U(g, k, \Phi_y, \Phi_z) = 0; \quad g \in G, \quad k \in \mathbb{C} \\ \vec{E}_{tg}(g) \text{ і } \vec{H}_{tg}(g) \text{ безперервні під час перетину } S^{\epsilon, \sigma}, \\ U \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} \right\} (l_y, z, k, \Phi_y, \Phi_z) = e^{2\pi i \Phi_y} U \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} \right\} (0, z, k, \Phi_y, \Phi_z), \\ U \left\{ \frac{\partial U}{\partial z} \right\} (l_z, z, k, \Phi_y, \Phi_z) = e^{2\pi i \Phi_z} U \left\{ \frac{\partial U}{\partial z} \right\} (y, 0, k, \Phi_y, \Phi_z) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

має нетривіальний (не обов'язково єдиний) розв'язок

$\bar{U}(g, \bar{k}_j, \Phi_y, \Phi_z) = \sum_{m,n} u_{m,n}(\bar{k}_j) \mu_{m,n}(g)$, називається точковим спектром фотонного кристала. Очевидно, що відповідні нетривіальні розв'язки характеризують так звані вільні коливання, конфігурація поля яких, добротність і структура просторових гармонік $u_{m,n}(\bar{k}_j) \mu_{m,n}(g)$ визначається величиною $\bar{k}_j = \text{Re} \bar{k}_j + i \text{Im} \bar{k}_j$ – власною частотою, що відповідає вільному коливанню $\bar{U}(g, \bar{k}_j, \Phi_y, \Phi_z)$ [25, 93, 94].

З теореми про комплексну потужність в інтегральній формі

$$\oint_{\delta G} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{ds} = \int_G \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}^*) dg = i \bar{k} \eta_0 \int_G \mu_0 |\vec{H}|^2 dg - \frac{i \bar{k}^*}{\eta_0} \int_G \varepsilon |\vec{E}|^2 dg - \int_G \sigma |\vec{E}|^2 dg,$$

сформульованої для нетривіального розв'язку $\bar{U}(g, \bar{k}, \Phi_y, \Phi_z)$ [1, 25], отримуємо

$$\text{Im} \bar{k} (V_3 + V_2) + V_1 = 0, \quad \text{Re} \bar{k} (V_3 - V_2) = 0. \quad (3.14)$$

Тут прийняті такі позначення: δG – межа області G ; $\{\vec{E}, \vec{H}\}$ – поле вільних коливань; $V_1 = \varepsilon_0 \eta_0 \int_G \sigma |\vec{E}|^2 dg \geq 0$ – енергія, яку втрачає поле, що вільно коливається, в неідеальних елементах кристала; $V_2 = \int_G \varepsilon_0 \varepsilon |\vec{E}|^2 dg > 0$ – енергія електричного поля, що вільно коливається; $V_3 = \int_G \mu_0 |\vec{H}|^2 dg > 0$ – енергія магнітного поля, що вільно коливається.

Не існує вільних коливань, поле яких не задовольняє рівнянням (3.14). З цього загального твердження випливають такі наслідки, частину з яких можна трактувати як теореми єдиності розв'язків задачі (3.9) для частот k , що належать якійсь певній частині S : (а) енергія електричного поля, що вільно коливається, дорівнює енергії магнітного поля, що вільно коливається; (б) при

$\sigma(g) \equiv 0$ всі власні частоти кристала розташовуються на дійсній осі; (в) при нерівній тотожно нулю питомої провідності $\sigma(g)$ всі власні частоти $\bar{k}$ кристала розташовуються в нижній півплощині площини C .

Розглянемо тепер таку задачу (3.9), де функція $F(g, k)$ обмежена в G , а функція $\bar{\epsilon}(g)$ неперервна в G і має тут неперервні часткові похідні по y та z . Вважаємо також, що $F(g, k)$, як функція частотного параметру k , не має особливостей в комплексній площині C . Дотримуючись [25, 92], побудуємо розв'язок $U(g, k) \equiv U(g, k, \Phi_y, \Phi_z)$, $k \in C$ цієї задачі як границю $U(g, k) = \lim_{j \rightarrow \infty} U_j(g, k)$ послідовності функцій $\{U_j(g, k)\}$ таких, що

$$\begin{aligned} (\Delta_g + k^2)U_0(g, k) &= F(g, k), & (\Delta_g + k^2)U_1(g, k) &= (1 - \bar{\epsilon})k^2U_0(g, k) + F(g, k), \dots, \\ (\Delta_g + k^2)U_j(g, k) &= (1 - \bar{\epsilon})k^2U_{j-1}(g, k) + F(g, k), \dots; & \Delta_g &= \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

і кожна з функцій $U_j(g, k)$ задовольняє всім крайовим умовам задачі (3.9). Використовуючи властивості канонічної функції Гріна $G_0(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z)$, перепишемо співвідношення (3.15) у формі

$$\begin{aligned} U_0(g) &= \int_G G_0(g, p) F(p) dp, & U_1(g) &= \int_G G_0(g, p) [(1 - \bar{\epsilon}(p))k^2U_0(p) + F(p)] dp, \dots, \\ U_j(g) &= \int_G G_0(g, p) [(1 - \bar{\epsilon}(p))k^2U_{j-1}(p) + F(p)] dp, \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Справедливі наступні твердження [25, 92].

Твердження 1. Існує область $C_0 \in C$ така, що послідовність (3.16) рівномірно по k та g відповідно в C_0 та G збігається до розв'язку задачі (3.9)

– до голоморфної в C_0 функції $U(g, k)$, яка визначається рівнянням

$$U(g, k) = \int_G G_0(g, p, k) \left[(1 - \bar{\varepsilon}(p)) k^2 U(p, k) + F(p, k) \right] dp; \quad g \in G. \quad (3.17)$$

Твердження 2. Функція $U(g, k)$ продовжується з області $C_0 \in C$ на всю площину C як мероморфна функція змінної k . В частині C , де функція $U(g, k)$ залишається голоморфною, вона зберігає всі свої властивості як розв'язок задачі (3.9).

Перше з цих тверджень доводимо, дотримуючись [25] та використовуючи надані в підрозділі 3.6.1 властивості функції $G_0(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z)$. Доказ другого твердження базується на аналізі оператор-функції

$$A(k)[U] = k^2 \int_G G_0(g, p, k) (1 - \bar{\varepsilon}(p)) U(p, k) dp; \quad L_2(G) \rightarrow L_2(G), \quad k \in C \quad (3.18)$$

інтегрального рівняння (3.17) (ми доводимо, що $A(k)[U]$ є цілком неперервною скінченно-мероморфною оператор-функцією) та на використанні мероморфної теореми Фредгольма [31, 95].

Рівності (3.16) можна записати у формі $U_j(g, k) = \int_G G_j(g, p, k) F(p, k) dp$, де

$$G_j(g, p, k) = G_0(g, p, k) + k^2 \int_G G_0(g, q, k) G_{j-1}(q, p, k) (1 - \bar{\varepsilon}(q)) dq. \quad (3.19)$$

Як і у випадку функцій $U_j(g, k)$, встановлюємо, що існує область $C_0 \in C$ така, в якій для всіх $k \in C_0$ та $g, p \in G$ послідовність (3.19) рівномірно збігається до голоморфної в C_0 функції

$$G(g, p, k) = G_0(g, p, k) + k^2 \int_G G_0(g, q, k) G(q, p, k) (1 - \bar{\varepsilon}(q)) dq \quad (3.20)$$

(до функції Гріна $G(g, p, k) \equiv G(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z)$ діелектричного фотонного кристала), і що

$$U(g, k, \Phi_y, \Phi_z) = \int_G G(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z) F(p, k) dp. \quad (3.21)$$

Просте переформулювання твердження 2 дозволяє продовжити $G(g, p, k)$ з C_0 таким чином, що вона, як мероморфна функція комплексної змінної k , стає визначеною на всій площині C для всіх $g, p \in G$. При такому продовженні функції $G(g, p, k)$ зберігаються і її властивості (3.20), (3.21). В частині площини C , де функція $G(g, p, k)$ залишається голоморфною, вона для всіх $g \neq p$:

- неперервна по g , а коли $g \rightarrow p$, $G(g, p, k) = O(\ln r^{-1})$;
- має неперервні часткові похідні по y та z , а коли $r \rightarrow 0$, $\partial G(g, p, k) / \partial r = O(r^{-1})$;
- задовольняє рівнянню $(\Delta_g + k^2 \bar{\varepsilon}) G(g, p, k) = 0$ й умовам квазіперіодичності;
- $G(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z) = G^*(g, p, -k^*, -\Phi_y, -\Phi_z) = G(p, g, k, -\Phi_y, -\Phi_z)$.

Всі результати, що сформульовано вище (крім останньої рівності), отримуємо як прямі наслідки властивостей канонічної функції Гріна $G_0(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z)$, використовуючи вираз (3.20) і співвідношення $\bar{\varepsilon}^*(-k^*) = \bar{\varepsilon}(k)$. До останньої рівності приходимо, розкриваючи вираз

$$\begin{aligned}
& \int_G G(q, g, k, \Phi_y, \Phi_z) G(q, p, k_1, -\Phi_y, -\Phi_z) [k^2 \bar{\mathcal{E}}(q, k) - k_1^2 \bar{\mathcal{E}}(q, k_1)] dq = \\
& = \int_G \left\{ G(q, g, k, \Phi_y, \Phi_z) [\Delta_q G(q, p, k_1, -\Phi_y, -\Phi_z) - \delta(q, p)] - \right. \\
& \quad \left. - [\Delta_q G(q, g, k, \Phi_y, \Phi_z) - \delta(q, g)] G(q, p, k_1, -\Phi_y, -\Phi_z) \right\} dq = \\
& = G(g, p, k_1, -\Phi_y, -\Phi_z) - G(p, g, k, \Phi_y, \Phi_z)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

(тут $\delta(\dots)$ – δ -функція Дірака) й спрямовуючи в (3.22) $k_1 \rightarrow k$.

Практично всі надані вище результати й результати, які ми ще опишемо, зберігають силу і тоді, коли функція $\bar{\mathcal{E}}(g)$ є неперервною та має неперервні частинні похідні не в усій області G , а тільки в різних її частинах, що розділені досить гладкими контурами $S_x^{\varepsilon, \sigma}$. Функції $U(g, k, \Phi_y, \Phi_z)$ та $G_0(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z)$, а також їхні перші частинні похідні залишаються неперервними уздовж кривих $S_x^{\varepsilon, \sigma}$ [92], а отже виконаною виявляється умова неперервності тангенційних складових електромагнітного поля на поверхнях $S^{\varepsilon, \sigma}$. Враховуючи цей факт й використовуючи результати робіт [95, 96] про розкладання головної частини резольвенти, ми можемо тепер таким чином сформулювати основний результат цього підрозділу, узагальнюючий висновки, зроблені в твердженні 2.

Твердження 3. Функція Гріна $G(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z)$ фотонного кристала (розв'язок задачі (3.9) при $F(g, k) = \delta(g, p)$) породжує в $\mathbb{C}$ скінченно-мероморфну оператор-функцію $R^{-1}(k): L_2(G) \rightarrow L_2(G)$ таку, що $U(g, k, \Phi_y, \Phi_z) = R^{-1}(k)[F(g, k)]$ ($R^{-1}(k)$ – резольвентна оператор-функція). Це означає, що всі особливості функції $G(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z)$, як функції змінної $k \in \mathbb{C}$, вичерпуються полюсами скінченного порядку, а її лишок в полюсній точці $k = \bar{k}$ може бути записаний у формі

$$\text{Res}_{k=\bar{k}} G(g, p, k) = \bar{G}(g, p, \bar{k}) = \sum_{j=1}^J \bar{U}_j(g, \bar{k}) \underline{U}_j(p, \bar{k}^*). \tag{3.23}$$

Тут $\bar{U}_j(g, \bar{k})$, $j=1,2,\dots,J$ – канонічна система власних елементів оператор-функції $R(k): R(k)[U(g, k)] = F(g, k)$, яка відповідає характеристичному числу $\bar{k}$ (в наших термінах – система лінійно незалежних вільних коливань поля в кристалі, що відповідають власній частоті $\bar{k}$). Вибір цієї системи однозначно визначає канонічну систему $\underline{U}_j(p, \bar{k}^*)$ власних елементів, що відповідають характеристичному числу $\bar{k}^*$, оператор-функції $R^*(k^*)$, спряженої до $R(k^*)$.

3.6.3 Вільні коливання поля в фотонному кристалі

Припустимо, що всі полюси $\{\bar{k}_j\}$ функції $G(g, p, k)$ $k \in \mathbb{C}$ прості. Це припущення нас ніяк принципово не обмежує. До того ж, його можна строго обґрунтувати для всіх дійсних $\bar{k}$ [25]. Обравши будь-яке значення $\bar{k}_n \in \{\bar{k}_j\}$ й помноживши співвідношення (3.22) на $(k_1 - \bar{k}_n)$, отримуємо після граничного переходу $k_1 \rightarrow \bar{k}_n$

$$\int_G G(q, g, k, \mp \Phi_y, \mp \Phi_z) \bar{G}(q, p, \bar{k}_n, \pm \Phi_y, \pm \Phi_z) [k^2 \bar{\varepsilon}(q, k) - k_n^2 \bar{\varepsilon}(q, \bar{k}_n)] dq = \bar{G}(g, p, \bar{k}_n, \pm \Phi_y, \pm \Phi_z). \quad (3.24)$$

Спрямувавши в (3.24) k до k_n , приходимо до

$$\begin{aligned} 2\bar{k}_n \int_G \bar{G}(q, g, \bar{k}_n, \mp \Phi_y, \mp \Phi_z) \bar{G}(q, p, \bar{k}_n, \pm \Phi_y, \pm \Phi_z) \underline{\varepsilon}(q, k_n) dq = \\ = \bar{G}(g, p, \bar{k}_n, \pm \Phi_y, \pm \Phi_z); \quad \underline{\varepsilon}(q, k) = \varepsilon + i\sigma\eta_0/2k. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Помноживши далі (3.24) на $(k - \bar{k}_m)$, $\bar{k}_m \neq \bar{k}_n$ і спрямовуючи k до $\bar{k}_m$,

отримуємо

$$\int_G \bar{G}(q, g, \bar{k}_m, \mp \Phi_y, \mp \Phi_z) \bar{G}(q, p, \bar{k}_n, \pm \Phi_y, \pm \Phi_z) [k_m^2 \bar{\varepsilon}(q, k_m) - k_n^2 \bar{\varepsilon}(q, k_n)] dq = 0 \quad (3.26)$$

Нескладно показати [92], що функція $\bar{G}(g, p, \bar{k}_n, \Phi_y, \Phi_z)$ є неперервною по g для кожного p та має неперервні частинні похідні першого порядку в замиканні G . З (3.24) отримуємо також

$$\begin{aligned} [\Delta_g + k^2 \bar{\varepsilon}(g, k)] \bar{G}(g, p, \bar{k}_n, \pm \Phi_y, \pm \Phi_z) = \\ = [k^2 \bar{\varepsilon}(g, k) - \bar{k}_n^2 \bar{\varepsilon}(g, \bar{k}_n)] \bar{G}(g, p, \bar{k}_n, \pm \Phi_y, \pm \Phi_z); \quad g, p \in G, \end{aligned}$$

або, коли $k \rightarrow \bar{k}_n$,

$$[\Delta_g + \bar{k}_n^2 \bar{\varepsilon}(g, \bar{k}_n)] \bar{G}(g, p, \bar{k}_n, \pm \Phi_y, \pm \Phi_z) = 0; \quad g, p \in G. \quad (3.27)$$

Співвідношенням (3.27) ми формально підтверджуємо той факт, що лишки мероморфної функції $G(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z)$ визначають можливі вільні коливання поля у фотонному кристалі, а сукупність полюсів цієї функції становить множина Ω_k , яку ми назвали раніше точковим спектром структури.

Припускаючи, що розв'язок $U(g, k, \Phi_y, \Phi_z)$ задачі (3.9) зменшується до нуля на правильній системі замкнених контурів $C_r \subset C$ при необмеженому зростанні їхнього радіусу r , і застосовуючи теорему Меттаг-Леффлера про зображення [78] до мероморфної функції $U(g, \omega, \Phi_y, \Phi_z) / (\omega - k)$, $k \notin \Omega_k$, отримуємо

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{C_r} \frac{U(g, \omega, \Phi_y, \Phi_z)}{(\omega - k)} d\omega = U(g, k, \Phi_y, \Phi_z) + \sum_n \frac{\text{Res} U(g, \omega, \Phi_y, \Phi_z)_{\omega=k_n}}{\bar{k}_n - k} = 0$$

або

$$U(g, k, \Phi_y, \Phi_z) = \sum_n \frac{\text{Res} U(g, \omega, \Phi_y, \Phi_z)_{\omega=k_n}}{k - \bar{k}_n} = \sum_n \frac{\left[\int_G \text{Res} G(g, p, \omega, \Phi_y, \Phi_z) F(p, \omega) dp \right]_{\omega=\bar{k}_n}}{(k - \bar{k}_n)}. \quad (3.28)$$

З (3.28) та (3.23), як наслідок, отримуємо

Твердження 4. Розв'язок задачі (3.9) можна зобразити таким рядом за системою власних функцій $\bar{U}_j(g, \bar{k}_n)$, $j = 1, 2, \dots, J$, $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$U(g, k, \Phi_y, \Phi_z) = \sum_n \frac{\left[\sum_{j=1}^J B_{j,n} \bar{U}_j(g, \bar{k}_n) \right]}{(k - \bar{k}_n)}; \quad k \notin \Omega_k, \quad B_{j,n} = \int_G \underline{U}_j(p, \bar{k}_n^*) F(p, \bar{k}_n) dp. \quad (3.29)$$

Припущення щодо поведінки функції $U(g, k, \Phi_y, \Phi_z)$, коли $k \notin \Omega_k$ і $|k| \rightarrow \infty$, що було зроблене під час побудови ряду (3.29), можна виправдати, наприклад, в такий спосіб. Припустимо, що носій функції $F(g, k)$ лежить строго всередині області G , тобто функції $F(g, k)$ і її нормальні похідні на границі G дорівнюють нулю. Тоді

$$\begin{aligned}
0 &= \int_G \left[F(g, k) \bar{\epsilon}^{-1}(g, k) \Delta_g G(g, p, k, -\Phi_y, -\Phi_z) - \right. \\
&\quad \left. - G(g, p, k, -\Phi_y, -\Phi_z) \Delta_g \left[F(g, k) \bar{\epsilon}^{-1}(g, k) \right] \right] dg = F(p, k) \bar{\epsilon}^{-1}(p, k) - \\
&\quad - \int_G \left[F(g, k) k^2 G(g, p, k, -\Phi_y, -\Phi_z) + G(g, p, k, -\Phi_y, -\Phi_z) \Delta_g \left[F(g, k) \bar{\epsilon}^{-1}(g, k) \right] \right] dg = \\
&= F(p, k) \bar{\epsilon}^{-1}(p, k) - k^2 U(p, k, \Phi_y, \Phi_z) - \tilde{U}(p, k, \Phi_y, \Phi_z); \\
\tilde{U}(p, k, \Phi_y, \Phi_z) &= \int_G G(p, g, k, \Phi_y, \Phi_z) \tilde{F}(g, k) dg, \quad \tilde{F}(g, k) = \Delta_g \left[F(g, k) \bar{\epsilon}^{-1}(g, k) \right].
\end{aligned}
\tag{3.30}$$

З (3.30) отримуємо $U(g, k, \Phi_y, \Phi_z) = \left[F(g, k) \bar{\epsilon}^{-1}(g, k) - \tilde{U}(g, k, \Phi_y, \Phi_z) \right] k^{-2}$, що, очевидно, при несуттєвих обмеженнях на поведінку $F(g, k)$ при великих $|k|$ дає необхідний нам результат.

Поставивши задачу (3.9) для фотонних кристалів досить загальної геометрії, ми обмежилися далі викладом результатів тільки для діелектричних структур. Узагальнення цих результатів на випадок структур, що містять включення з ідеального металу, не викликає ускладнень: побудувавши замість канонічної функції Гріна $G_0(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z)$ функцію Гріна «порожньої» області $\underline{G} = \overline{G \setminus \text{int } S_x}$ з межею $\delta G \cup S_x$ проводимо подальший аналіз так само, як це було зроблено вище, й результати, що стосуються загального випадку, отримаємо з тих, що відносяться до діелектричного кристала, роблячи очевидні, прості зміни у формулювання останніх.

3.6.4 Алгоритми розв'язання спектральних задач

Основні якісні характеристики множини власних частот фотонного кристала і вільні коливання поля, що з ним зв'язані, є визначеними: спектр Ω_k являє собою лише злічену множину точок $\bar{k} \in C$, що не скупчуються ніде в скінченній частині площини C ; кожному елементу $\bar{k}$ цієї множини відповідає скінченне число лінійно незалежних власних функцій $\bar{U}_j(g, \bar{k}, \Phi_y, \Phi_z)$

$j=1,2,\dots,J$ оператора $E-A(k)$ (див. формули (3.17), (3.18); E – тотожний оператор); будь-який розв’язок $U(g,k,\Phi_y,\Phi_z) \in L_2(G)$ задачі (3.9) зобразимо рядом (3.29) за власними функціями, які відповідають всім елементам множини Ω_k .

Зараз ми спробуємо побудувати досить коректний алгоритм числового розв’язання спектральної задачі (3.13). Ключовим тут є слово «коректний», оскільки при звичайних, стандартних підходах до аналізу проблеми ігноруються дуже важливі, ключові питання, без відповіді на які результати, що отримуються, обґрунтованими назвати ніяк не можна.

Всі власні частоти $\bar{k}$ й поля $\bar{U}_j(g,\bar{k},\Phi_y,\Phi_z)$ всіх вільних коливань, які з цими частотами пов’язані, визначимо, розв’язуючи операторне рівняння $[E-A(k)][U]=0$, еквівалентне спектральній задачі (3.13). Це однорідне рівняння отримуємо з (3.17), вважаючи $F(p,k) \equiv 0$. Метод розкладання за плоскими хвилями [30, 52, 53] дозволяє перейти до матричної форми $[\tilde{E}-\tilde{A}(k)][\tilde{U}]=0$ цього рівняння, а саме, здійснити заміни

$$[E-A(k)][U]=0 \Rightarrow \sum_{s=1}^{\infty} [\delta_r^s - a_{r,s}(k)] u_s = 0; \quad r=1,2,3,\dots,$$

$$E \Rightarrow \tilde{E} = \{\delta_r^s\}_{r,s=1}^{\infty}, \quad A(k) \Rightarrow \tilde{A}(k) = \{a_{r,s}(k)\}_{r,s=1}^{\infty}, \quad U \Rightarrow \tilde{U} = \{u_s\}_{s=1}^{\infty} \in l_2.$$

Тут δ_r^s – символ Кронекера; $a_{r,s}(k) = (A\mu_s, \mu_r)$; $u_s = (U, \mu_s)$; $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток в $L_2(G)$; $l_2 = \{a = \{a_s\} : \sum_s |a_s|^2 < \infty\}$ – простір нескінченних послідовностей; $\mu_s = \mu_{m(s),n(s)}$; і те, яке з правил перерахунку значень індексів s та r за значеннями m та n тут реалізується, практично не важливо. Один з можливих варіантів перерахунку індексів ми наводимо на рис. 3.21.

Алгоритм розв’язання спектральної задачі будують, зазвичай, на оберненні редукованої до порядку N нескінченної системи лінійних

алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{s=1}^{\infty} [\delta_r^s - a_{r,s}(k)] u_s = 0; \quad r=1,2,3,\dots, \quad (3.31)$$

а як наближене значення $\bar{k}$ беруть розв'язок $k = \bar{k}_N$ скалярного рівняння

$$\Delta_N(k) = \det \{ \delta_r^s - a_{r,s}(k) \}_{r,s=1}^N = 0 \quad (3.32)$$

при досить великому значенні N .

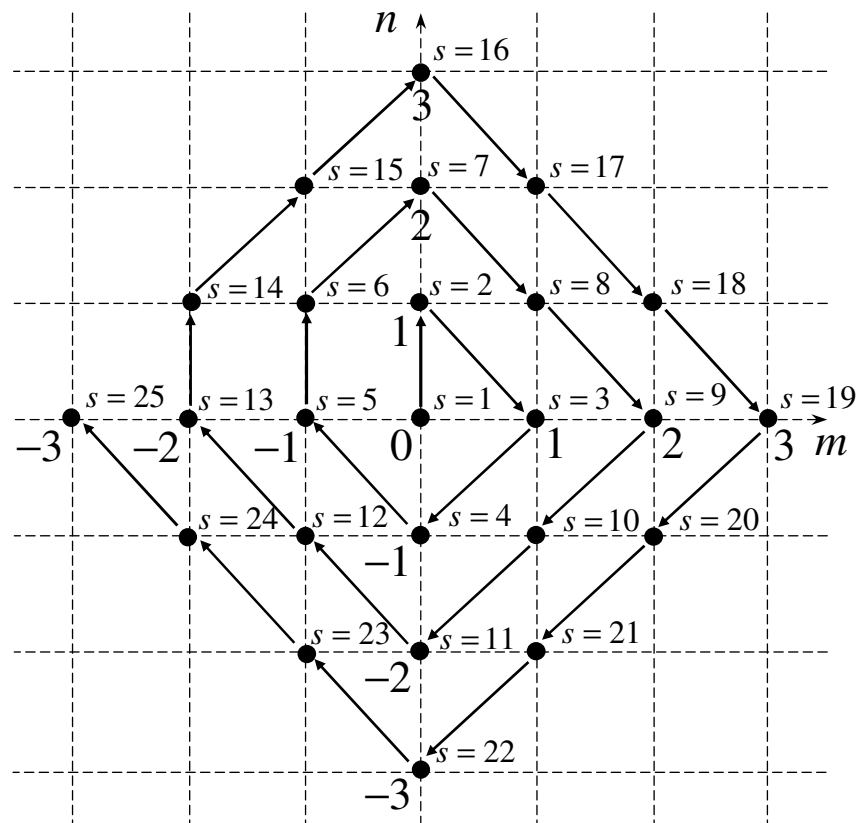


Рисунок 3.21 – Правило перерахунку індексів підсумовування

Що може бути досить надійною основою для виправдання таких кроків? Відзначимо, перш за все, результати роботи [68], які дозволяють зробити

наступні висновки. Якщо (а) $\tilde{A}(k) = \{a_{r,s}(k)\}_{r,s=1}^{\infty}$ – голоморфна в деякій області $C_0 \in \mathbb{C}$ матриця-функція зі значеннями з простору $\mathfrak{R}_{\infty}$ цілком неперервних операторів [69], (б) послідовність редукованих матриць $\tilde{E}_N - \tilde{A}_N(k) = \{\delta_r^s - a_{r,s}(k)\}_{r,s=1}^N$, коли $N \rightarrow \infty$, власно збігається (термін з [68]) до нескінченної матриці $\tilde{E} - \tilde{A}(k) = \{\delta_r^s - a_{r,s}(k)\}_{r,s=1}^{\infty}$ для всіх $k \in C_0$ та (в) $\bar{k} \in C_0$, то існує послідовність $\{\bar{k}_N\}_N$, $\bar{k}_N \in C_0$ така, що $\bar{k}_N \rightarrow \bar{k}$, коли $N \rightarrow \infty$. З іншого боку, якщо виконані умови (а), (б), сформульовані вище, та (г) послідовність $\{\bar{k}_N\}_N$, $\bar{k}_N \in C_0$ збігається, коли $N \rightarrow \infty$ до точки $k = \bar{k} \in C_0$, то ця точка $\bar{k} \in \Omega_k$.

Якщо ж оператор-функція $A(k): L_2(G) \rightarrow L_2(G)$, яка належить $\mathfrak{R}_{\infty}$ (див. підрозділ 3.6.2), породжує в області $C_0 \in \mathbb{C}$, де вона голоморфна, ядерну матрицю-функцію $\tilde{A}(k)$ ($A(k) \in \mathfrak{R}_1$) або матрицю Кох $\tilde{E} - \tilde{A}(k)$ [69], то існує голоморфна в C_0 функція-визначник $\Delta(k) = \det[E - A(k)]$, яка має такі властивості [31, 69, 95], що дозволяють виправдати використання рівняння (3.32) для побудови наближених розв'язків спектральної задачі (3.31). Кратність J власного значення $\bar{k}$ оператор-функції $E - A(k)$ збігається з кратністю нуля скалярної функції $\Delta(k)$, коли $k = \bar{k}$. Функція $\Delta_N(k) = \det\{\delta_r^s - a_{r,s}(k)\}_{r,s=1}^N$, коли $N \rightarrow \infty$ збігається до функції $\Delta(k)$ рівномірно для всіх $k \in C_0$. Для всіх $k \in C_0$

$$|\Delta(k) - \Delta_N(k)| \leq \|A(k) - \tilde{A}_N(k)\|_{\mathfrak{R}_1} \exp\left(\|A(k)\|_{\mathfrak{R}_1} + \|\tilde{A}_N(k)\|_{\mathfrak{R}_1} + 1\right). \quad (3.33)$$

Із (3.33) та з співвідношення

$$\begin{aligned} |\bar{k}_N - \bar{k}|^J &= J! \left| \Delta(\bar{k}_N) \left[\frac{d^J}{dk^J} \Delta(k) \right]_{k=\bar{k}} \right|^{-1} + O\left[(\bar{k}_N - \bar{k})^{J+1}\right]; \\ \frac{d^j}{dk^j} \Delta(k) \Big|_{k=\bar{k}} &= 0 \quad \text{для} \quad j=0,1,\dots,J-1, \end{aligned}$$

що одержано під час розкладання функції $\Delta(k)$ в ряд Тейлора в околі точки $k = \bar{k}$, виходить така, наприклад, оцінка реальної швидкості збіжності $\bar{k}_N \rightarrow \bar{k}$, коли N досить великі:

$$|\bar{k}_N - \bar{k}|^J \leq \text{const} \left\| A(\bar{k}_N) - \tilde{A}_N(\bar{k}_N) \right\|_{\mathfrak{R}_1} = \text{const} \sum_{r=N+1}^{\infty} |a_{r,r}(\bar{k}_N)|. \quad (3.34)$$

На які з перелічених вище результатів можна опертися в розглянутій нами ситуації, а саме, під час розв'язання спектральної задачі $[E - A(k)][U] = 0$? Оператор $A(k)$, $k \in C_0$ – цілком неперервний оператор, але вимога (б) власної збіжності редукованих матриць $\tilde{E}_N - \tilde{A}_N(k)$ до нескінченної матриці $\tilde{E} - \tilde{A}(k)$, строгу перевірку якого ми вважаємо проблематичною, істотно ускладнює використання результатів роботи [68], що, взагалі-то, цілком відповідають нашим потребам.

Матриця $\tilde{A}(k)$, що породжується оператор-функцією $A(k): L_2(G) \rightarrow L_2(G)$, $k \in C_0$, не є ядерною. Не виконана необхідна і достатня умова (ряд $\sum_{r=1}^{\infty} a_{r,r}(k)$ збігається), пов'язана зі скінченністю матричного сліду оператора $A(k)$ [69]. Матрицю $\tilde{A}(k)$ не можна віднести й до матриць Кох (достатня умова - $\sum_{r=1}^{\infty} |a_{r,r}(k)| < \infty$ та $\sum_{r,s=1}^{\infty} |a_{r,s}(k)|^2 < \infty$ [69]). До такого висновку приходимо, представляючи оператор $A(k)$ у вигляді $A(k) = B(k)C(k)$, де

$$B(k)[U] = k^2 \int_G G_0(g, p, k, \Phi_y, \Phi_z) U(p, k, \Phi_y, \Phi_z) dp$$

та

$$C(k)[U] = \int_G \delta(g, p) [1 - \bar{\varepsilon}(p)] U(p, k, \Phi_y, \Phi_z) dp,$$

або в матричній формі

$$\begin{aligned} \tilde{B}(k) &= \{b_{r,s}(k)\}_{r,s=1}^{\infty}; \quad b_{r,s}(k) = \frac{k^2 \delta_r^s}{k^2 - \alpha_{m(s)}^2 - \beta_{n(s)}^2} \quad \text{та} \\ \tilde{C}(k) &= \{c_{r,s}(k)\}_{r,s=1}^{\infty}; \quad c_{r,s}(k) = \varepsilon_{r-s}, \quad \varepsilon_r = \int_G [1 - \bar{\varepsilon}(g)] \mu_r^*(g) dg. \end{aligned} \quad (3.35)$$

З (3.35) отримуємо $a_{r,s}(k) = k^2 \varepsilon_{r-s} (k^2 - \alpha_{m(r)}^2 - \beta_{n(r)}^2)$, та, оскільки ряд $\sum_{m,n} (m^2 + n^2)$ розходиться [92], то розходяться й ряди $\sum_{r=1}^{\infty} a_{r,r}(k)$, $\sum_{r=1}^{\infty} |a_{r,r}(k)|$.

3.6.5 Регуляризація спектральних задач

Отже, строго обґрунтувати стійкість та збіжність обчислювальної схеми, що базується на розв'язанні редукованої до порядку N нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.31), не вдається. Але, очевидно, що $\sum_{r,s=1}^{\infty} |a_{r,s}(k)|^2 < \infty$, і отже, $A(k)$ – оператор Гільберта-Шмідта [69] ($A(k) \in \mathfrak{K}_2 \subset \mathfrak{K}_{\infty}$). Це дозволяє нам, дотримуючись [69], перейти до задачі

$$\sum_{s=1}^{\infty} [\delta_r^s - d_{r,s}(k)] v_s = 0; \quad r = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.36)$$

еквівалентної до задачі (3.31). Тут $\delta_r^s - d_{r,s}(k) = [\delta_r^s - a_{r,s}(k)] \exp[a_{s,s}(k)]$, $v_s = \exp[-a_{s,s}(k)] u_s$ і, як це впливає з розкладання величини $\exp[a_{r,r}(k)]$ в ряд за степенями $a_{r,r}(k)$, $d_{r,r}(k) = 1 - [1 - a_{r,r}(k)] \exp(a_{r,r}(k)) = O(a_{r,r}^2(k))$. Остання рівність дозволяє стверджувати, що оператор $D(k)$, який відповідає матриці $\tilde{D}(k) = \{d_{r,s}(k)\}_{r,s=1}^{\infty}$, є ядерним та породжує матрицю Кох $\tilde{E} - \tilde{D}(k)$.

Тепер в нас є всі підстави для того, щоб коректно редукувати систему (3.36) й розраховувати наближені значення $\bar{k}_N$ власних частот $\bar{k}$ 2-D фотонного кристала, розв'язуючи характеристичне рівняння $\det\{\delta_r^s - d_{r,s}(k)\}_{r,s=1}^N = 0$. Відзначимо, що повторення описаної вище процедури призводить, відповідно до нерівності (3.34), до послідовностей $\{\bar{k}_N\}_N$, швидкість збіжності яких до точних значень $\bar{k}$ з кожним таким кроком істотно зростає.

Закінчимо аналіз одним елементарним, але досить показовим прикладом. Нехай в системі (3.31) елементи $a_{r,s}(k)$ матричного оператора $\tilde{A}(k) = \{a_{r,s}(k)\}_{r,s=1}^{\infty}$, коли r та s досить великі, ведуть себе, як $O[(r+s)^{-1}]$. Це означає, що оператор $\tilde{A}(k): l_2 \rightarrow l_2$ – оператор типу Гільберта [97]. Він обмежений, але не цілком неперервний. Немає ніяких підстав очікувати, що під час редукції системи (3.31) та розв'язання дисперсійного рівняння (3.32) ми отримаємо потрібний нам результат. Під час регуляризації задачі (коли переходимо до задачі (3.36)), отримуємо $d_{r,r}(k) = O(a_{r,r}^2(k)) = O(r^{-2})$, а з оцінки типу (3.34) – $|\bar{k}_N - \bar{k}|^J \leq \text{const}(N+1)^{-1}$. Збіжність методу редукції забезпечена. При повторенні процедури регуляризації отримуємо $|\bar{k}_N - \bar{k}|^J \leq \text{const}(N+1)^{-3}$ – швидкість збіжності шуканих величин до їхнього точного значення збільшується на два порядки.

3.7 Висновки до розділу 3

У розділі запропоновані й реалізовані нові підходи до аналізу просторово обмежених 2-D фотонних кристалів та різних функціональних елементів на їхній основі. Ці підходи базуються на числових експериментах з моделями методу точних поглинаючих умов і дозволяють строго розв'язувати широке коло фундаментальних і прикладних задач теорії двовимірно-періодичних структур. Так, наприклад, аналіз, проведений в підрозділах 3.2 та 3.5, може бути основою для розробки ефективних схем діагностики просторово обмежених фотонних кристалів, схем, що дозволяють строго оцінювати їхні еквівалентні матеріальні параметри. У розділі отримані й нові фізичні результати. Стосуються вони, здебільшого, процесів формування заборонених зон у випадку обмежених за товщиною та компактних в поперечному перерізі структур, визначення електродинамічних характеристик хвилевідних та резонансних порожнин в кристалах, особливостей у роботі ряду простих хвилевідних вузлів, реалізації ефектів накопичення енергії та радіаційних ефектів, які обумовлені можливістю поширення в кристалах так званих зворотних хвиль.

Надані в другій частині розділу аналітичні результати можуть стати за основу побудови повноцінної спектральної теорії 2-D фотонних кристалів. Такі теорії вже створені для класичних електродинамічних структур компактних неоднорідностей вільного простору [32, 93, 94], хвилевідних вузлів [98] та одновимірно-періодичних ґраток [3, 25]. Отримані за допомогою спектральних теорій результати дозволяють обґрунтовано й ефективно вивчати фізику процесів резонансного розсіяння хвиль [1, 32, 61], розв'язувати практично важливі задачі, що пов'язані з синтезом різних типів резонансних структур, які формують, спрямовують і випромінюють монохроматичні та імпульсні електромагнітні сигнали [61, 86, 87].

Проблема, розгляду якої присвячені підрозділи 3.6.4, 3.6.5, в теорії 2-D та 3-D фотонних кристалів позначилася давно і пов'язана з порушенням збіжності

або стійкості обчислювальних схем, що часто спостерігається, схем, які реалізують стандартні для відповідного напрямку алгоритми розрахунку спектрів вільних коливань електромагнітного поля в розглянутих періодичних структурах та спектрів їхніх власних хвиль [52, 53]. Маються на увазі алгоритми сіткових методів в частотній області й так званого «методу розкладання за плоскими хвилями». Алгоритми методів часової області цих недоліків позбавлені, вони дозволяють досить точно розраховувати всі спектральні характеристики практично будь-яких відкритих і закритих резонансних структур (комплексні власні частоти, конфігурацію та добротність вільних коливань поля), що належать до обраної скінченної смуги частот [32, 79, 80].

Ми розглядаємо на одному простому прикладі, умови, виконання яких може гарантувати збіжність та стійкість алгоритмів розв'язання спектральних задач, і показуємо, що за стандартного підходу відповідні умови можуть і не виконуватися. Це означає, що зазвичай реалізовані обчислювальні схеми не є достатньо коректними та потребують регуляризації. Опис одного з можливих способів аналітичної регуляризації, що використовувався раніше в теорії несамопряжених операторів [69], ми розміщуємо в підрозділі 3.6.5.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі вирішена важлива наукова задача, яка пов'язана з розробкою ефективних підходів до дослідження процесів резонансного розсіювання імпульсних і монохроматичних хвиль двовимірно-періодичними структурами – дифракційними ґратками і просторово обмеженими 2-D фотонними кристалами.

Основні оригінальні результати дисертаційної роботи є такими:

1. Вперше здійснена фізично і математично коректна постановка модельних початково-крайових задач електродинамічної теорії двовимірно-періодичних ґраток, яка дозволяє використовувати в повній мірі властивості трансляційної симетрії структури під час скорочення області аналізу до прямокутного в поперечному перерізі каналу Флоке і допускає строгий аналіз випадку похилого падіння монохроматичних плоских хвиль.

2. Розвинуто метод строгого розв'язання модельних задач теорії двовимірно-періодичних структур (ґраток і просторово обмежених 2-D фотонних кристалів), що базується на побудові точних поглинаючих умов, які коректно обмежують простір розрахунку в стандартних сіткових методах.

3. Отримано аналітичні результати, що описують ряд важливих властивостей імпульсних і монохроматичних електромагнітних хвиль, які поширюються в регулярних частинах прямокутного каналу Флоке – в зонах відбиття і проходження двовимірно-періодичних структур. Зокрема, вперше для двовимірно-періодичних ґраток скінченної товщини, що збуджуються поперечно-електричними і поперечно-магнітними плоскими хвилями, виведено строгі аналітичні та фізичні наслідки з теореми Пойнтінга про комплексну потужність і леми Лоренца – співвідношення балансу енергії за гармоніками, що поширюються і загасають, співвідношення взаємності та ін.

4. Розвинуто метод транспортних операторів, який значно скорочує вимоги до ресурсів комп'ютерів під час розрахунку багатошарових ґраток і

граток на товстих діелектричних підкладнях, які часто зустрічаються в оптиці.

5. Вирішено ряд ключових питань спектральної теорії двовимірно-періодичних ґраток і 2-D фотонних кристалів, побудова якої необхідна для вірного фізичного аналізу процесів резонансного розсіяння хвиль відповідними структурами. Зокрема, побудовано канонічні функції Гріна зазначених структур, визначено природні області варіації спектральних параметрів, сформульовано твердження, що дозволяють оцінити області локалізації елементів спектральної множини та ін.

6. Розроблено ефективну схему аналітичної регуляризації спектральних задач теорії 2-D фотонних кристалів. Вивчено умови, що необхідні для обґрунтованого використання методу редукції під час розв'язання нескінченних систем лінійних рівнянь, до яких спектральні задачі для 2-D фотонних кристалів зводяться методом розкладання за плоскими хвилями, який широко використовується на практиці.

7. В обчислювальних експериментах з моделями методу точних поглинаючих умов отримано нові фізичні результати, що пов'язані: з процесами формування заборонених зон в обмежених за товщиною 2-D фотонних кристалах; з визначенням стандартних (таких, як у класичній теорії хвилеводів) характеристик «дефектів» в компактних кристалах, що спрямовують і розсіюють електромагнітні хвилі; з можливістю побудови на таких дефектах різних функціональних елементів, які ефективно перетворюють сигнал, що надходить на них (розширення, що запирає, T -розгалуження, резонансні накопичувачі енергії, випромінювачі).

В дисертації проведено досить повний і акуратний аналіз проблем, що виникають під час розрахунку електродинамічних характеристик двовимірно-періодичних дифракційних ґраток і 2-D нескінченних і просторово обмежених фотонних кристалів. Створено надійну аналітичну базу для вирішення актуальних фізичних і прикладних задач, що пов'язані з використанням таких структур в техніці міліметрових і субміліметрових хвиль, оптиці і мікрохвильовій електроніці. Це – задачі аналізу і синтезу нових штучних

матеріалів з характерними розмірами включень від мікро- до нанометрів; задачі *in situ* моніторингу періодичних структур, що виготовлено літографічним способом; задачі створення повноцінної елементної бази на компактних фотонних кристалах і т.п.

В роботі ще раз переконливо продемонстровано універсальність і ефективність підходів, які базуються на побудові точних поглинаючих умов, що забезпечують стійкість та збіжність відповідних обчислювальних схем, вірогідність та надійність результатів, що описують фізику процесів резонансного розсіяння імпульсних і монохроматичних хвиль. Підтверджено, що метод точних поглинаючих умов можна застосовувати для розв'язання дуже широкого кола різноманітних задач, які складають як теоретичний, так і практичний інтерес, задач, що виникають у різних областях радіофізики, оптики, в фотоніці та антенній техніці. Але в самій теорії методу точних поглинаючих умов і в напрямках, що з ним поєднані (один із таких напрямків – операторний метод, який розвинуто в дисертації), є ще багато питань, вирішення яких допомогло б значно розширити область його застосування не тільки в обчислювальній електродинаміці, але й в обчислювальній фізиці в цілому.

Насамкінець автор висловлює подяку своєму науковому керівнику, професору Сіренку Юрію Костянтиновичу, за запропоновану тему досліджень, за постійну допомогу під час розв'язання всіх задач дисертації, зацікавлене обговорення і конструктивну критику результатів роботи.

Хочу висловити подяку і всім тим, з ким я співпрацювала досить щільно під час виконання роботи і чию підтримку я завжди відчувала: своїм співавторам з опублікованих робіт, кандидатам фіз.-мат. наук Л. Г. Величко, В. Л. Пазиніну, К. Ю. Сіренку, Н. П. Яшиній; всім співробітникам лабораторії математичної фізики Інституту радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Sirenko Yu.K. Modeling and analysis of transient processes in open resonant structures. New methods and techniques / Y.K. Sirenko, S. Strom, N.P. Yashina. – New York: Springer, 2007. – 362 p.
2. An FFT-accelerated FDTD scheme with exact absorbing conditions for characterizing axially symmetric resonant structures / K. Sirenko, V. Pazynin, Yu. Sirenko, H. Bagci // Progress in Electromagnetics Research. – 2011. – Vol. 111. – P. 331–364.
3. Modern theory of gratings. Resonant scattering: analysis techniques and phenomena / [Y.K. Sirenko, S. Strom eds.] – New York: Springer, 2010. – 390 p.
4. Величко Л.Г. Двумерно-периодические решетки. Часть I. Начально-краевые задачи и точные поглощающие условия для прямоугольного канала Флоке / Л.Г. Величко, А.А. Кривчикова (**А.А. Слюсаренко**), Ю.К. Сиренко // Радиофизика и электроника. – 2012. – Т. 3(17), № 2. – С. 3–10.
5. Величко Л.Г. Двумерно-периодические решетки. Часть II. Свойства нестационарных и установившихся полей в прямоугольном канале Флоке / Л.Г. Величко, А.А. Кривчикова (**А.А. Слюсаренко**) // Радиофизика и электроника. – 2012. – Т. 3(17), № 2. – С. 10–19.
6. Величко Л.Г. Двумерно-периодические решетки. Часть III. Элементы спектральной теории / Л.Г. Величко, А.А. Кривчикова (**А.А. Слюсаренко**), Ю.К. Сиренко // Радиофизика и электроника. – 2012. – Т. 3(17), № 3. – С. 3–7.
7. Analytical grounds for spectral theory of 2-D photonic crystals / K. Sirenko, Yu. Sirenko, **H. Sliusarenko**, N. Yashina // Telecommunications and Radio Engineering. – 2016. – Vol. 75, no. 16. – P. 1417–1433.
8. Sirenko Yu. Doubly-periodic electrodynamic structures: methods and analysis results. A review / Yu. Sirenko, **H. Sliusarenko**, K. Balabekov // Telecommunications and Radio Engineering. – 2016. – Vol. 75, – 2016. – Vol. 75, no. 19 – P. 1705–1719.

9. Sautbekov S. Doubly-periodic photonic crystals: spectral problems analysis / S. Sautbekov, Yu. Sirenko, **H. Sliusarenko** // Progress In Electromagnetics Research Letters. – 2017. - Vol. 66. – P. 71–77.

10. 2-D photonic crystals: electromagnetic models of the method of exact absorbing conditions / M. Ney, K. Sirenko, Yu. Sirenko, **H. Sliusarenko**, N. Yashina // Telecommunications and Radio Engineering. – 2017. – Vol. 76, no. 3. – P. 185–207.

11. Kryvchikova A.A. (**Sliusarenko H.O.**) Electrodynamic properties of nonstationary and steady-state fields in the Floquet channel of a three-dimensional periodic structure [Електронний ресурс] / A.A. Kryvchikova (**H.O. Sliusarenko**) // Proc. of 11 Kharkiv young scientist conference on radiophysics, electronics, photonics and biophysics. – Kharkiv, 2011. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).

12. Velychko L. Elements of the spectral theory of double-periodic gratings [Електронний ресурс] / L. Velychko, A. Kryvchikova (**H. Sliusarenko**) // Proc. of International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Kharkiv, 2012. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).

13. Kryvchikova A.A. (**Sliusarenko H.O.**) Energy balance equations and reciprocity relations for two dimensionally periodic structures [Електронний ресурс] / A.A. Kryvchikova (**H.O. Sliusarenko**) // Proc. of 6 International Conference on Ultra Wideband and Ultrashort Impulse Signals. – Sevastopol, Ukraine, 2012. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).

14. Velychko L. Analysis of photonic crystals using FDTD technique [Електронний ресурс] / L. Velychko, **H. Sliusarenko** // Proc. of the 7th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics. – Bordeaux, France, 2013. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).

15. **Sliusarenko H.O.** Two-dimensionally periodic structures: investigation, application and methods for solving problems of diffraction of electromagnetic waves [Електронний ресурс] / **H.O. Sliusarenko** // Proc. of International Young Scientists Forum on Applied Physics. – Dnipropetrovsk, Ukraine, 2015. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).

16. **Slusarenko H.O.** Accurate simulation of 2D Periodic Structures excitation by an obliquely incident plane wave [Електронний ресурс] / **H.O. Slusarenko** // Proc. of 9th international Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves MSMW'2016. – Kharkiv, Ukraine, 2016. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).

17. Sirenko K. Time domain discontinuous Galerkin method with exact absorbing boundary conditions for analyzing three-dimensionally diffraction gratings [Електронний ресурс] / K. Sirenko, A. Kryvchikova (**H. Slusarenko**), Y. Sirenko, H. Bagci // Proc. IEEE International symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI National Radio science Meeting. – Chicago, USA, 2012. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM)..

18. Агранович З.С. Дифракция плоских волн на плоских металлических решетках / З.С. Агранович, В.А. Марченко, В.П. Шестопапов // ЖТФ. – 1962. – Т. 32. – № 4. – С. 381–394.

19. Шестопапов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн / В.П. Шестопапов. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 400 с.

20. Дифракция волн на решетках / В.П. Шестопапов, Л.Н. Литвиненко, С.А. Масалов, В.Г. Сологуб – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. – 288 с.

21. Шестопапов В.П. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции / В.П. Шестопапов, А.А. Кириленко, С.А. Масалов. – Киев: Наук. думка. – 1984. – 396 с.

22. Литвиненко Л.Н. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах / Л.Н. Литвиненко, С.Л. Просвирнин. – Киев: Наук. думка, 1984. – 240 с.

23. Резонансное рассеяние волн. Т.1. Дифракционные решетки / В.П. Шестопапов, А.А. Кириленко, С.А. Масалов, Ю.К. Сиренко. – Киев: Наук. думка, 1986. – 232 с.

24. Electromagnetic theory of gratings / R. Petit ed. – New York: Springer-Verlag, 1980. – 360 p.

25. Шестопапов В.П. Динамическая теория решеток / В.П. Шестопапов, Ю.К. Сиренко. – Киев: Наук. думка, 1989. – 215 с.
26. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. Аналитическая регуляризация краевых задач электродинамики / В.П. Шестопапов, Ю.А. Тучкин, А.Е. Поединчук, Ю.К. Сиренко. – Харьков: Основа, 1997. – 285 с.
27. Физические основы диапазонных технологий типа «Стелс» / С.А. Масалов, А.В. Рыжак, О.И. Сухаревский, В.М. Шкиль. – Санкт-Петербург: Изд-во Военного инженерно-космического ун-та, 1999. – 214 с.
28. Фундаментальные и прикладные задачи теории рассеяния электромагнитных волн / Ю.К. Сиренко, И.В. Сухаревский, О.И. Сухаревский, Н.П. Яшина. – Харьков: КРОК, 2000. – 344 с.
29. Lytvynenko L.M. Wave diffraction by periodic multilayer structures / L.M. Lytvynenko, S.L. Prosvirnin. – Cambridge: Cambridge Scientific Publ., 2012. – 158 p.
30. Photonic crystals. Molding the flow of light / J.D. Joannopoulos, S.G. Johnson, J.N. Winn, R.D. Meade. – Princeton: Princeton Univ. Press, 2008. – 304 p.
31. Рид М. Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов / М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 1982. – 443 с.
32. Кравченко В.Ф. Преобразование и излучение электромагнитных волн открытыми резонансными структурами / В.Ф. Кравченко, Ю.К. Сиренко, К.Ю. Сиренко. – М.: Физматлит, 2011. – 320 с.
33. Sirenko K. Accurate characterization of 3D diffraction gratings using time domain discontinuous Galerkin method with exact absorbing boundary conditions / K. Sirenko, H. Bagci, Yu. Sirenko // Proc. of 2013 IEEE AP-S/USNC-URSI Symposium. – Orlando, USA.– 2013.
34. Dobson D. The time-harmonic Maxwell equations in a doubly periodic structure / D.C. Dobson, A. Friedman // J. Math. Anal. Appl. – 1992. – Vol. 166. – P. 507–528.

35. Bruno O. Numerical solution of diffraction problems: A method of variation of boundaries. III. Doubly-periodic gratings / O. Bruno, F. Reitich // *Journal of the Optical Society of America* – 1993. – Vol. 10. – P. 2551–2562.

36. Dobson D. A variational method for electromagnetic diffraction in biperiodic structures / D. Dobson // *Model. Math. Anal. Numer.* – 1994. – Vol. 28. – P. 419–439.

37. Bao G. Variational approximation of Maxwell's equations in biperiodic structures / G. Bao // *SIAM J. Appl. Math.* – 1997. – Vol. 57. – P. 364–381.

38. Просвирнин С.Л. Преобразование поляризации при отражении волн микрополосковой решеткой из элементов сложной формы / С.Л. Просвирнин // *Ридиотехника и электроника*. – 1999. – Т. 44, № 6. – С. 681–686.

39. Грибовский А.В. Отражательная фазированная антенная решетка из прямоугольных волноводов конечной глубины / А.В. Грибовский, С.Л. Просвирнин, И.И. Резник // *Радиофизика и радиоастрономия*. – 1997. – Т. 2, № 1. – С. 52–61.

40. Грибовский А.В. Преобразование поляризации электромагнитных волн на плоском двухэлементном экране конечной толщины с волноводными каналами прямоугольного сечения / А.В. Грибовский // *Радиофизика и радиоастрономия*. – 2005. – Т. 10, № 1. – С. 92–97.

41. Yachin V.V. The scattering of electromagnetic waves by rectangular-cell double-periodic magnetodielectric gratings / V.V. Yachin, N.V. Ryazantseva // *Microwave and Optical Technology Letters*. – 1999. – Vol. 23, no. 3. – P. 177–183.

42. Сидорчук Н.В. Рассеяние электромагнитных волн двоякопериодическим магнитодиелектрическим слоем / Н.В. Сидорчук, В.В. Ячин // *Радиофизика и радиоастрономия*. – 2005. – Т. 10, № 1. – С. 50–61.

43. Гиппиус Н.А. Применение метода матрицы рассеяния для расчета оптических свойств метаматериалов / Н.А. Гиппиус, С.Г. Тиходеев // *Успехи физических наук*. – 2009. – Т. 179, № 9. – С. 1027–1030.

44. New absorbing boundary conditions and analytical model for multilayered mushroom-type metamaterials: Applications to wideband absorbers / [Ya.R. Padooru,

A.B. Yakovlev, C.S.R. Kaipa et al.] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2012. – Vol. 60, no. 12. – P. 5727–5742.

45. Taflove A. Computational electrodynamics: the finite-difference time domain method / A. Taflove, S.C. Hagness. – Boston: Artech House, 2000. – 1038 p.

46. Belkhir A. Three-dimensional finite-difference time-domain algorithm for oblique incidence with adaptation of perfectly matched layers and nonuniform meshing: Application to the study of a radar dome / A. Belkhir, F.I. Baida // Physical Review E. – 2008. – Vol. 77. – P. 056701-1–056701-10.

47. FDTD analysis of periodic structures with arbitrary skewed grid / [K. ElMahgoub, F. Yang, A.Z. Elsherbeni et al.] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2010. – Vol. 58, no. 8. – P. 2649–2657.

48. Харди́ков В.В. Использование матриц передачи и псевдоспектрального метода во временной области для исследования дифракции света на планарных периодических структурах / В.В. Харди́ков, Е.О. Яр́ко, С.Л. Просви́рнин // Радиофизика и электроника. – 2008. – Т. 13, № 2. – С. 146–158.

49. Khardikov V.V. Trapping of light by metal arrays / V.V. Khardikov, E.O. Iarko, S.L. Prosvirnin // Journal of Optics. – 2010. – Vol. 12. – P. 045102-1–045102-11.

50. Fornberg B.A. Practical guide to pseudospectral methods / B.A. Fornberg – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. – 231 p.

51. Вани́н В.А. Дифракция нестационарной электромагнитной волны на бипериодической решетке / В.А. Вани́н, С.Л. Просви́рнин // Радиофизика и электроника. – 2004. – Т. 9, № 4. – С. 417–429.

52. Lourtioz J.-M. Photonic crystals: Towards nanoscale photonic devices / J.M. Lourtioz, H. Bensty, V. Berger. – New York: Springer, 2005. – 509 p.

53. Johnson S.G. Block-iterative frequency-domain methods for Maxwell's equations in a planewave basis / S.G. Johnson, J.D. Joannopoulos // Optics Express. – 2001. – Vol. 8, no. 3. – P. 173–190.

54. http://ab-initio.mit.edu/wiki/index.php/MIT_Photonic_Bands

55. Cerenkov radiation in photonic crystals / C. Luo, M. Ibanescu, S.G. Johnson, J.D. Joannopoulos // *Science*. – 2003. – Vol. 299. – P. 368–371.
56. Butt H. Photonic crystals & metamaterial filters based on 2D arrays of silicon nanopillars / H. Butt, Q. Dai, T.D. Wilkinson // *Progress In Electromagnetics Research*. – 2011. – Vol. 113. – P. 179–194.
57. Superprism effect and light refraction and propagation in photonic crystals / [W. Jiang, C. Tian, Yo. Jiang et al.] // *Proceedings of SPIE*. – 2005. – Vol. 5733. – P. 50–57.
58. Antireflection gratings for a photonic-crystal flat lens / W. Smigaj, B. Gralak, R. Pierre, G. Tayeb // *Optics Letters*. – 2009. – Vol. 34, no. 22. – P. 3532–3534.
59. Robinson S. Investigation on two dimensional photonic crystal resonant cavity based bandpass filter / S. Robinson, R. Nakkeeran // *Optik*. – 2012. – Vol. 123. – P. 451–457.
60. Шестопапов В.П. Резонансное рассеяние волн. Т. 2. Волноводные неоднородности / В.П. Шестопапов, А.А. Кириленко, Л.А. Рудь. – Киев: Наук. Думка, 1986. – 216 с.
61. Electromagnetic waves in complex systems. Selected theoretical and applied problems / [L. Pazynin, V. Pazynin, I. Petrusenko et al.; Y. Sirenko, L. Velychko eds.] – New York: Springer, 2016. – 446 p.
62. Sakoda K. Transmittance and Bragg reflectivity of two-dimensional photonic lattices / K. Sakoda // *Physical Review B*. – 1995. – Vol. 52, no. 12. – P. 8992–9002.
63. Photonic crystal based subwavelength imaging and cloaking optical devices / [O. Vanbesien, N. Fabre, X. Melique et al.] // *PIERS Online*. – 2009. – Vol. 5, no. 3. – P. 216–220.
64. Блюх К.Ю. Что такое левые среды и чем они интересны? / К.Ю. Блюх, Ю.П. Блюх // *Успехи физических наук*. – 2004. – Т. 174, № 4. – P. 439–447.

65. Yee K.S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media / K.S. Yee // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1966. – Vol. 14, no. 4. – P. 302–307.

66. Berenger J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves / J.-P. Berenger // Journal of Computational Physics. – 1994. – Vol. 114, no. 1. – P. 185–200.

67. Самарский А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент / А.А. Самарский // Вестник Академии Наук СССР. – 1979. – № 5. – С. 38–49.

68. Вайникко Г.М. О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра / Г.М. Вайникко, О.О. Карма // Журнал вычислит. математики и математ. физики. – 1974. – Т. 14, № 6. – С. 1393–1408.

69. Гохберг И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

70. Rothwell E.J. Electromagnetics / E.J. Rothwell, M.J. Cloud. – Boca Raton: CRC Press, 2001. – 540 p.

71. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

72. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 407 с.

73. Сиренко К.Ю. Точные «поглощающие» условия в начально-краевых задачах теории открытых волноводных резонаторов / К.Ю. Сиренко, Ю.К. Сиренко // Журнал вычислит. математики и математ. физики. – 2005. – Т. 45. – № 3. – С. 509–525.

74. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М.: Наука, 1989. – 544 с.

75. Шестопалов В.П. Принцип взаимности и некоторые физические закономерности рассеяния волн на дифракционных решетках /

В.П. Шестопалов, А.А. Кириленко, С.А. Масалов // Вестник АН УССР. – 1975. – № 3. – С. 8–18.

76. Титчмарш Э.Ч. Введение в теорию интегралов Фурье / Э.Ч. Титчмарш. – М.: КомКнига, 2007. – 480 с.

77. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

78. Гурвиц А. Теория функций / А. Гурвиц, Р. Курант. – М.: Наука, 1968. – 648 с.

79. Sirenko Y.K. Time-domain and frequency-domain methods combined in the study of open resonance structures of complex geometry / Y.K. Sirenko, L.G. Velychko, F. Erden // Progress in Electromagnetics Research. – 2004. – Vol. 44. – P. 57–79.

80. Velychko L.G. Time-domain analysis of open resonators. Analytical grounds / L.G. Velychko, Y.K. Sirenko, O.S. Shafalyuk // Progress in Electromagnetics Research. – 2006. – Vol. 61. – P. 1–26.

81. Сиренко Ю.К. Аналитическое продолжение задач дифракции и пороговые явления в электродинамике / Ю.К. Сиренко // Докл. АН УССР – 1986. – № 8. – С. 65–68.

82. Колтон Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. – М.: Мир, 1987. – 312 с.

83. Yablonovitch E. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics / E. Yablonovitch // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58. – P. 2059–2062.

84. John S. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices / S. John // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58. – P. 2486–2489.

85. Ivansson S.M. Designing 2D phononic crystal slabs with transmission gaps for solid angle as well as frequency variation / S.M. Ivansson // Advances in Acoustics and Vibration. – 2014. – Vol. 2014. – Article ID 317890.

86. Sirenko K.Y. Modeling and analysis of transients in periodic gratings. I. Fully absorbing boundaries for 2-D open problems / K.Y. Sirenko, Y.K. Sirenko,

N.P. Yashina // Journal of the Optical Society of America A. – 2010. – Vol. 27, no. 5. – P. 532–543.

87. Velychko L.G. Controlled changes in spectra of open quasi-optical resonators / L.G. Velychko, Y.K. Sirenko // Progress In Electromagnetics Research B. – 2009. – Vol. 16. – P. 85–105.

88. Model synthesis of energy compressors / [I.K. Kuzmitchev, P.M. Melezhyk, V.L. Pazynin et al.] // Радиофизика и электроника. – 2008. – Т. 13, № 2. – С. 166–172.

89. Compression and radiation of high-power short radio pulses. I. Energy accumulation in direct-flow waveguide compressors / K. Sirenko, V. Pazynin, Y. Sirenko, H. Bagci // Progress In Electromagnetics Research. – 2011. – Vol. 116. – P. 239–270.

90. Compression and radiation of high-power short radio pulses. II. A novel antenna array design with combined compressor/radiator elements / K. Sirenko, V. Pazynin, Y. Sirenko, H. Bagci // Progress In Electromagnetics Research. – 2011. – Vol. 116. – P. 271–296.

91. Hutson V.C.L. Applications of functional analysis and operator theory / V.C.L. Hutson, J.S. Pym. – New York: Academic Press, 1980. – 432 p.

92. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2 / Э.Ч. Титчмарш. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 556 с.

93. Спектральная теория открытых двумерных резонаторов с диэлектрическими включениями / [В.Н. Кошпаренок, П.Н. Мележик, А.Е. Поединчук и др.] // Журнал вычислит. математики и математ. физики. – 1985. – Т. 25. – С. 562–573.

94. Об аналитической природе явления междутиповой связи собственных колебаний / П.Н. Мележик, А.Е. Поединчук, Ю.А. Тучкин, В.П. Шестопапов // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 300, № 6. – С. 1356–1359.

95. Гохберг И.Ц. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше / И.Ц. Гохберг, Е.И. Сигал // Математический сборник. – 1971. – Т. 84, № 4. – С. 607–629.

96. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов / М.В. Келдыш // Успехи математических наук. – 1971. – Т. 26, № 4. – С. 15–44.

97. Hardy G.H. Inequalities / G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya. – Cambridge: Cambridge University Press, 1934. – 314 p.

98. Pochanina I.E. Electromagnetic properties of open waveguide resonator / I.E. Pochanina, N.P. Yashina // Electromagnetics. – 1993. – Vol. 13, no. 3. – P. 289–300.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Величко Л.Г. Двумерно-периодические решетки. Часть I. Начально-краевые задачи и точные поглощающие условия для прямоугольного канала Флоке / Л.Г. Величко, А.А. Кривчикова, Ю.К. Сиренко // Радиофизика и электроника. – 2012. – Т. 3(17), № 2. – С. 3–10.
2. Величко Л.Г. Двумерно-периодические решетки. Часть II. Свойства нестационарных и установившихся полей в прямоугольном канале Флоке / Л.Г. Величко, А.А. Кривчикова // Радиофизика и электроника. – 2012. – Т. 3(17), № 2. – С. 10–19.
3. Величко Л.Г. Двумерно-периодические решетки. Часть III. Элементы спектральной теории / Л.Г. Величко, А.А. Кривчикова, Ю.К. Сиренко // Радиофизика и электроника. – 2012. – Т. 3(17), № 3. – С. 3–7.
4. Sirenko K. Analytical grounds for spectral theory of 2-D photonic crystals / K.Sirenko, Yu. Sirenko, H. Sliusarenko, N. Yashina // Telecommunications and Radio Engineering. – 2016. – Vol. 75, no. 16. – P. 1417–1433.
5. Sirenko Yu. Doubly-periodic electrodynamic structures: methods and analysis results. A review / Yu. Sirenko, H. Sliusarenko, K. Balabekov // Telecommunications and Radio Engineering. – 2016. – Vol. 75, no. 19 – P. 1705–1719.
6. Sautbekov S. Doubly-periodic photonic crystals: spectral problems analysis / S. Sautbekov, Yu. Sirenko, H. Sliusarenko // Progress In Electromagnetics Research Letters. – 2017. - Vol. 66. – P. 71–77.
7. 2-D photonic crystals: electromagnetic models of the method of exact absorbing conditions / M. Ney, K. Sirenko, Yu. Sirenko, H. Sliusarenko, N. Yashina // Telecommunications and Radio Engineering. – 2017. – Vol. 76, no. 3. – P. 185–207.

8. Kryvchikova A.A. Electrodynamic properties of nonstationary and steady-state fields in the Floquet channel of a three-dimensional periodic structure [Електронний ресурс] / A.A. Kryvchikova // Proc. of 11 Kharkiv young scientist conference on radiophysics, electronics, photonics and biophysics. – Kharkiv, 2011. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).
9. Velychko L. Elements of the spectral theory of double-periodic gratings [Електронний ресурс] / L. Velychko, A. Kryvchikova // Proc. of International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Kharkiv, 2012. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).
10. Kryvchikova A.A. Energy balance equations and reciprocity relations for two dimensionally periodic structures [Електронний ресурс] / A. A. Kryvchikova // Proc. of 6 International Conference on Ultra Wideband and Ultrashort Impulse Signals. – Sevastopol, Ukraine, 2012. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).
11. Velychko L. Analysis of photonic crystals using FDTD technique [Електронний ресурс] / L. Velychko, H. Sliusarenko // Proc. of the 7th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics. – Bordeaux, France, 2013. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).
12. Sliusarenko H.O. Two-dimensionally periodic structures: investigation, application and methods for solving problems of diffraction of electromagnetic waves [Електронний ресурс] / H.O. Sliusarenko // Proc. of International Young Scientists Forum on Applied Physics. – Dnipropetrovsk, Ukraine, 2015. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).
13. Sliusarenko H.O. Accurate simulation of 2D Periodic Structures excitation by an obliquely incident plane wave [Електронний ресурс] / H.O. Sliusarenko // Proc. of 9th international Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves MSMW'2016 – Kharkiv, Ukraine, 2016. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).
14. Sirenko K. Time domain discontinuous Galerkin method with exact absorbing boundary conditions for analyzing three-dimensionally diffraction gratings [Електронний ресурс] / K. Sirenko, A. Kryvchikova, Y. Sirenko, H. Bagci // Proc.

IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI National Radio science Meeting. – Chicago, USA, 2012. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).

Апробація результатів дисертації

1. 11 Kharkiv Young Scientist Conference on Radiophysics, Electronics, Photonics and Biophysics (Kharkiv, Ukraine, 28 November – 2 December, 2011), усна доповідь;
2. 6 International Conference on Ultra Wideband and Ultrashort Impulse Signals (Sevastopol, Ukraine, 17–21 September, 2012), усна доповідь;
3. International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (Kharkiv, Ukraine, 28–30 August, 2012), усна доповідь;
4. 7 International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics (Bordeaux, France, 16–21 September, 2013), постер;
5. International Young Scientists Forum on Applied Physics (Dnipro, Ukraine, 29 September – 2 October, 2015), усна доповідь;
6. 9 International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (Kharkiv, Ukraine, 20–24 June, 2016), усна доповідь;
7. IEEE International symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI National Radio science Meeting (Chicago, USA, 8–14 July, 2012), постер.