Інститут радіофізики та електроніки ім. О Я. Усикова
Національна академія наук України

Інститут радіофізики та електроніки ім. О Я. Усикова
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
Праця на правах рукопису

БЄЛОБРОВ ВОЛОДИМИР ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 537.86 : 535.417.2

ДИСЕРТАЦІЯ

ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПОЛЯ ТА ПОРОГИ САМОЗБУДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РЕЗОНАТОРІВ З КРУГОВИХ ДІЕЛЕКТРИЧНИХ, МЕТАЛЕВИХ ТА КВАНТОВИХ НИТОК У ШАРУВАТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

01.04.03 – радіофізика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _____(В. О. Бєлобров)

Науковий керівник Носич Олександр Йосипович, доктор фіз.-мат. наук, проф.

Харків - 2017

АНОТАЦІЯ

Бєлобров В.О. Електромагнітні поля та пороги самозбудження періодичних резонаторів з кругових діелектричних, металевих та квантових нанониток у шаруватому середовищі. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.04.03 «Радіофізика». - Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України, Харків, 2017.

Розвиток пристроїв і систем, що використовують електромагнітні хвилі для спрямованої передачі і обробки інформації, призвів до потреби в компактних джерелах коротких хвиль, від терагерцевих до ультрафіолетових. Серед таких джерел важливе місце займають напівпровідникові, полімерні і монокристалічні лазери, тобто мікроразмірні і нанорозмірні резонатори, що містять активні зони.

В останні роки спостерігається стійке зростання інтересу до мікрорезонаторів з періодичними активними зонами у вигляді решіток з великого числа ідентичних квантових точок або квантових ниток. Зокрема, саме такі пристрої зараз розглядаються як найбільш перспективні джерела інфрачервоних і терагерцевих хвиль, а також джерела одиночних фотонів, що будуть використовуватися у квантових комп'ютерах майбутнього. Виготовлення подібних активних резонаторів або лазерів пов'язано з дуже дорогими технологіями, а вимірювання їх характеристик вимагає складної апаратури. Тому попереднє моделювання подібних пристроїв і теоретичний опис фізичних ефектів в них є критично важливими елементами відповідних досліджень.

Дана робота присвячена аналізу власних електромагнітних полів (мод) та їх частот і порогів самозбудження для періодичних відкритих резонаторів, що містять діелектричні, металеві і квантові нанонитки і знаходяться, в

загальному випадку, в шаруватому діелектричному середовищі. Активна зона моделюється через коефіцієнт заломлення, який має відмінну уявну частку (цей параметр називаємо порогом самозбудження). Разом з порогом шукається дійсна частота самозбудження; пара цих величин для кожної моди утворює лазазерне власне значення. Остання пов'язана з резонансною частотою з задачі дифракції, яка вивчається як допоміжна. Під квантовими нитками, згідно з прийнятою в нанотехнологіях термінологією, розуміються нанонитки з матеріалу, що має посилення. Такими матеріалами можуть бути напівпровідники, полімери з домішкою барвників, а також кристалічні речовини з добавками іонів рідкісноземельних елементів. Всі вони здатні посилювати спонтанну емісію світла при накачуванні, за рахунок створення інверсної населеності квантових станів. Аналіз проводиться за допомогою граничних задач для гармонічних лінійних рівнянь Максвелла, які зводяться до матричних рівнянь Фредгольма другого роду, що математично гарантує чисельну збіжність та контрольовану точність отриманих результатів.

Змістом цього дослідження є побудова електродинамічної моделі та розрахунок спектрів і порогів самозбудження лазерних мод для двовимірних власних полів періодичних відкритих резонаторів з діелектричних, металевих та квантових нанониток, поміщених в шарувату середу. Такі структури демонструють багато цікавих електромагнітних ефектів. В цій роботі чисельно та аналітично вивчаються такі з них, що пов'язані з періодичністю чи плазмонними ефектами, та вивчаються їх природа та взаємодія.

У цій дисертаційній роботі отримані наступні нові результати:

Вперше встановлена природа так званих граткових мод періодичних відкритих резонаторів, що містять нескінченні решітки з тонких діелектричних або металевих ниток.

Вперше встановлено, що в нескінченній решітці з тонких квантових нанониток граткові лазерні моди мають наднизькі пороги самозбудження.

Вперше показано, що можна домогтися зниження матеріальних порогів самозбудження граткових мод, збільшуючи відстань між квантовими

нитками, знижуючи їх показник заломлення, а також розміщуючи квантові нитки між розподіленими рефлекторами Брегга;

Продемонстровано, що в розсіянні і поглинанні хвиль на решітці з металевих нанониток і на бінарної решітці з діелектричних і металевих нанониток в світловому діапазоні спостерігаються резонанси на плазмонних модах і на граткових модах;

Вперше виявлено, що в бінарній решітці з квантових і металевих нанониток спільно існують плазмонні та граткові лазерні моди, причому пороги самозбудження граткових мод можуть бути нижче, ніж плазмонних мод;

Вперше встановлена, на підставі рівнянь Максвелла, оптична теорема для мод періодичного відкритого резонатора з квантових ниток, що зв'язує поріг самозбудження моди з характеристиками поля моди.

Вперше виведені асимптотичні вирази для комплексних власних частот граткових мод решітки з круглих діелектричних нанониток і порогів самозбудження для таких мод для решітки з кругових квантових ниток, справедливі, якщо радіус ниток або їх контраст з навколишнім середовищем прагнуть до нуля.

SUMMARY

Byelobrov V.A. Electromagnetic fields and lasing thresholds of periodic resonators with dielectric, metallic and quantum nanowires in layered medium. – Manuscript of qualifying scientific work.

The thesis is aimed to earn the Doctor of Philosophy degree in the major 01.04.03 "Radio Physics" – O. Y. Usikov Institute of Radiophysics and Electronics of NAS of Ukraine, Kharkiv, 2017.

Development of devices and systems, which use electromagnetic waves for directed signal transmission and procession has led to necessity of designing the

compact sources of short waves with frequencies ranging from Terahertz to ultraviolet. Among such sources, important place is occupied by semiconductor, polymer, and crystalline lasers, i.e. open resonators equipped with active regions.

Recent years have seen a steady growth of interest in microcavities (microsize resonators) with periodic active regions shaped as periodic arrays (gratings) of large number of identical quantum dots or quantum wires. In particular, such devices are considered as the most promising source of infrared and Terahertz waves, as well as sources of single photons in future quantum computers. Fabrication of such active resonators is a very expensive technology, while measuring their characteristics requires sophisticated equipment. Therefore preceding simulations of aforementioned devices and their theoretical description is a critically important element of relevant research.

This work is dedicated to the analysis of natural electromagnetic fields (modes) and their frequencies and self-excitation thresholds for periodic open resonators containing dielectric, metallic and quantum nanowires, placed, in general, in layered dielectric environment. The active region is characterized with the aid of the imaginary part of the refractive index, which is called the material threshold of lasing. It is sought together with the real modal frequency; the pair of these quantities for each mode makes a lasing-problem eigenvalue. The mode frequency is related to the resonance frequency in the scattering problem for similar passive geometry that is analyzed as auxiliary problem. By quantum wires, using the nanoscience terminology, we refer to nanowires of a material that possesses gain. Such materials can be semiconductors, dye-doped polymers, and crystalline materials doped with ions of rare elements. Each of them can enhance the spontaneous emission of light when pumped, by creating a population inversion of quantum states. The analysis is performed using the boundary value problems for linear time-harmonic Maxwell's equations, which are reduced to the matrix equations of the Fredholm second kind that mathematically guarantees convergence and controlled accuracy of numerical results.

The main subject of this research is the building of the full-wave electromagnetic model and calculation of modal thresholds and frequencies of lasing for two-dimensional eigenfields (modes) of periodic open resonators made of dielectric, metal and quantum nanowires placed in a layered dielectric environment. Such structures display numerous electromagnetic phenomena. In this work, we study, both numerically and analytically, those of them which are connected to the periodicity and the plasmonic effects, focusing on their nature and quantification.

The main outcomes of the thesis are the following:

The nature of the so-called grating modes of periodic open resonators containing infinite gratings of thin dielectric or metallic nanowires has been clarified;

It has been found that the grating modes of an infinite grating of quantum wires have ultra-low lasing thresholds;

It has been shown that it is possible to reduce the lasing thresholds of grating modes by increasing the distance between the quantum wires, reducing their refractive index, and placing the quantum wires between distributed Bragg reflectors;

It has been demonstrated that in the scattering and absorption of waves by a grating of metal nanowires and by a binary grating of dielectric and metal nanowires the optical resonances are observed on the plasmon modes and the grating (lattice) modes;

It has been revealed that the grating modes and the plasmonic modes coexist on a binary grating of metal nanowires and quantum nanowires, and the lasing thresholds of the grating modes may be lower than those of the plasmon modes;

On the basis of Maxwell's equations, it has been established the optical theorem for the modes of a periodic open resonator made quantum wires, connecting the lasing threshold with the characteristics of the mode field.

It has been derived the asymptotic approximations for the complex frequencies of the grating modes of a grating made of circular dielectric nanowires

and for the lasing thresholds of these modes of a grating of circular quantum wires, valid if the radius or the refractive index contrast with the environment tends to zero.

Список основних публікацій здобувача

1. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Mathematical analysis of the lasing eigenvalue problem for the optical modes in a layered dielectric cavity with a quantum well and distributed Bragg reflectors," Optical and Quantum Electronics, vol. 39, no 10-11, pp. 927-937, 2007.
2. V.O. Byelobrov, J. Ctyroky, T.M. Benson, A. Altintas, R. Sauleau, A.I. Nosich, "Low-threshold lasing modes of an infinite periodic chain of quantum wires," Optics Letters, vol. 35, no 21, pp. 3634-3636, 2010.
3. E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, T.M. Benson, J. Ctyroky, R. Sauleau, A.I. Nosich, "Optical theorem helps understand thresholds of lasing in microcavities with active regions," IEEE J. Quantum Electronics, vol. 47, no 1, pp. 20-30, 2011.
4. D.M. Natarov, V.O. Byelobrov, R. Sauleau, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Periodicity-induced effects in the scattering and absorption of light by infinite and finite gratings of circular silver nanowires," Optics Express, vol. 19, no 22, pp. 22176-22190, 2011.
5. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Binary grating of sub-wavelength silver and quantum wires as a photonic-plasmonic lasing platform with nanoscale elements," IEEE J. Selected Topics in Quantum Electronics, vol. 18, no 6, pp. 1839-1846, 2012.
6. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, "Extraordinary high-Q resonances in the scattering by a dielectric slab containing a grating of circular cylinders," Int. J. Semiconductor Physics, Quantum Electronics, and Optoelectronics, ISP NASU Press, Kiev, vol. 17, no 1, pp. 100-105, 2014.
7. V.O. Byelobrov, T.L. Zinenko, K. Kobayashi, A.I. Nosich, "Periodicity matters: grating or lattice resonances in the scattering by sparse arrays of sub-

wavelength strips and wires," IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 57, no 6, pp. 34-45, 2015.

8. T.L. Zinenko, V.O. Byelobrov, M. Marciniak, J. Ctyroky, A.I. Nosich, "Grating resonances on periodic arrays of sub-wavelength wires and strips: from discoveries to photonic device applications," in O. Shulika, I. Sukhoivanov (Eds.) Contemporary Optoelectronics: Materials, Metamaterials and Device Applications, Springer Ser. Optical Sciences, vol. 199, pp. 65-79, 2016.
9. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Lasing spectra and thresholds of the optical modes in a layered-DBR microcavity equipped with a quantum well," Proc. Mediterranean Microwave Symp. (MMS-2007), Budapest, 2007, pp. 167-170.
10. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A. Altintas, A.I. Nosich, "Characteristic equations for the lasing modes of infinite periodic chain of quantum wires," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-08), Athens, 2008, vol. 4, pp. 246-249.
11. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Near and far fields of high-quality resonances of an infinite grating of sub-wavelength wires," Proc. European Microwave Conf. (EuMC-11), Manchester, 2011, pp. 858-861.
12. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Plasmon resonances of an infinite grating of silver wires coated with dielectric envelopes," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-2012), Coventry, 2012, Tu.A5.6.
13. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, "Scattering of the plane wave from a periodically perforated dielectric slab," Proc. Int. Conf. Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL-2013), Sudak, 2013, pp. 43-45.
14. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, "Natural modes of an active slab microcavity with air-filled periodic inclusions," Proc. Int. Conf. Microwaves, Radar and Wireless Communications (MIKON-2014), Gdansk, 2014, pp. 442-445.
15. V.O. Byelobrov, "Optical properties of a dielectric slab front-loaded with a grating of plasmonic silver nanowires," Proc. Int. Conf. Electronics and Nanotechnology (ELNANO-2016), Kiev, 2016, pp. 64-66.

ЗМІСТ

СПИСОК ПРИЙНЯТИХ ПОЗНАЧЕНЬ 11

ВСТУП 12

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ 22

22

1.1 Дифракція радіохвиль плоских шаруватих структурах

1.2 Дифракція хвиль на нескінченних решітках круглих ниток 25

1.3 Власні моди пасивних відкритий резонатор 33

1.4 Лазерна задача на власні значення 37

1.5 Теорема пойнтінга для відкритий резонатор з активними зонами 43

РОЗДІЛ 2. ЧАСТОТЫ И ПОРОГИ МОД ПЛОСКОГО МНОГОСЛОЙНОГО РЕЗОНАТОРА 49

2.1 Діелектричний слой з активної зоною 51

2.2 Метод матриць переходу для багатошарових структур 58

2.3 Рефлектор Брегга та його властивості 61

2.4 Резонатор типу VCSEL 65

2.5 Теорема пойтінга для плоского відкритого резонатор з активної зоною 69

2.6 ВИСНОВКИ 72

РОЗДІЛ 3. ЧАСТОТЫ И ПОРОГИ МОД ОДИНОЧНОЙ РЕШЕТКИ ИЗ КВАНТОВЫХ НИТЕЙ 73

3.1 Постановка та основні рівняння задачі розсіяння та ЛЗВЗ 74

3.2 Граткові суми, способи сумовування і 78

їх асимптотичні наближення
3.3 Гармоніки Флоке і коефіцієнти відбиття і проходження 88
3.4 Сімейства симетрій 91
3.5 Результати чисельного розрахунку модових частот та порогів самозбудження 95
3.6 Асимптотичне наближення і теорема Пойнтінга 111
3.7 ВИСНОВКИ 121

РОЗДІЛ 4. ПЛАЗМОНІ ЕФЕКТИ НА МЕТАЛО-ДІЕЛЕКТРИЧНИХ РЕШІТКАХ З НАНОНИТОК 123

4.1 Формулювання задачі та опис діелектричною функції срібла 124
4.2 Решітка з срібних ниток у вільному просторі 128
4.3 Бінарних решітка з срібних і діелектричних ниток 132
4.4 Решітка з двошарового нанонитки 144
4.5 ВИСНОВКИ 150

РОЗДІЛ 5. МОДЫ РЕШЕТОК ИЗ НИТЕЙ В ПЛОСКОЙ СРЕДЕ 151

5.1. Метод операторів для шаруватих структур з решіткою 152
5.2. Решітка з кругових ниток у діелектричному шарі 156
5.3. Активний діелектричний шар з періодичними циліндричної порожнини 165
5.4. Діелектричний шар з решіткою з срібних ниток 168
5.5. ВИСНОВКИ 172

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВОКИ 173

СПИСОК ВИКОРАСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 175
ДОДАТОК А Список публікацій за темою дисертації 191

СПИСОК ПРИЙНЯТИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ГО – геометрична оптика

ЛЗВЗ – лазерна задача на власні значення

ЛРЗЗ – лазери з розподіленим зворотним зв'язком

МРЛ – микрорезонаторний лазер

ТП – теорема Пойнтінга

ВСТУП

Дана робота присвячена аналізу власних електромагнітних полів (мод) і їх частот і порогів самозбудження для періодичних відкритих резонаторів, що містять діелектричні, металеві та квантові нитки і знаходяться, в загальному випадку, в плоскошаруватому діелектричному середовищі. В якості допоміжних, також вивчаються двовимірні задачі дифракції монохроматичних плоских хвиль на решітках з кругових діелектричних і металевих нанониток. Під квантовими нитками, згідно з прийнятою в нанотехнології термінології, розуміються нанонити з матеріалу, що має посилення. Такими матеріалами можуть бути напівпровідники, полімери з домішкою барвників, а також кристалічні речовини з добавками іонів рідкісноземельних елементів. Всі вони здатні посилювати спонтанну емісію світла при накачуванні за рахунок створення інверсної населеності квантових станів. Аналіз проводиться за допомогою граничних задач для гармонійних в часі лінійних рівнянь Максвелла, які зводяться до матричних рівнянь Фредгольма другого роду.

Актуальність теми. Сучасні пристрої і системи передачі та обробки інформації за допомогою електромагнітних хвиль швидкими темпами освоюють короткохвильові діапазони від терагерцевих хвиль до ультрафіолетового випромінювання. Тому в даний час активно розробляються різноманітні джерела таких хвиль. Електронно-вакуумні джерела в цих діапазонах або відсутні або мають дуже малу потужність. Найбільш перспективними джерелами є лазери на основі монокристалічних, напівпровідникових і полімерних мікрорезонаторів (розміром від одиниць до декількох сотень мікрон) і решітки з нанорезонаторов (розмірами від декількох десятків до декількох сотень нанометрів). Активні зони в таких лазерах утворюються або завдяки квантовим властивостями напівпровідників, або шляхом добавки барвників в полімерну матрицю або іонів рідкоземельних елементів в кристалічний матеріал. Додання потрібної форми резонаторам здійснюється методами нанотехнологій, такими як молекулярно-променева епітаксії і сухе або вологе травлення, а для накачування застосовується або

оптичне випромінювання (фотонакачка), або інжекція носіїв заряду з електродів.

З усього вищесказаного ясно, що виробництво мікролазерів на основі як одиночних резонаторів, так і решіток з нанорезонаторов вимагає наявності надзвичайно дорогих технологій. Не менше проблем пов'язано з вимірюваннями їх характеристик, особливо в терагерцевом діапазоні хвиль. На сьогоднішній день тільки порівняно невелике число передових лабораторій в світі займається розробкою і експериментальними дослідженнями подібних лазерів: Університет Каліфорнії в місті Сан Дієго, Північно-західний університет в м. Еванстон, Університет Аалто в м. Гельсінкі, Лабораторія фотоніки та наноструктур CNRS в м. Маркуссі, Університет Хоккайдо в м. Саппоро, Інститут напівпровідників Китайської академії наук в Пекіні. В Україні подібних технологій поки немає. В силу цих обставин, попереднє моделювання зазначених лазерів і оптимізація їх геометрії ще на етапі проектування, до їх виготовлення, набувають критичне значення.

Слід підкреслити, що розробка ефективних мікро і нанолазеров вимагає точного обліку їх геометрії і матеріальних параметрів, оскільки їх розміри порівнянні з довжиною хвилі випромінювання. Більш того, одним з фундаментальних властивостей лазерів є те, що вони випромінюють світло на дискретних частотах. Це пов'язано з поняттям *власних мод* як дискретних станів електромагнітного поля в резонаторах. Тим самим, всякий лазер слід розглядати як відкритий резонатор, що містить в своєму складі активну зону, здатну при накачуванні генерувати електромагнітні хвилі.

До недавнього часу методи моделювання лазерних резонаторів вичерпувалися пошуком комплексних частот власних мод в *пасивних* резонаторах, без урахування наявності активної зони. Одним з найбільш широко використовувалися був метод геометричної оптики (ГО або теорія більярду). Однак він не може забезпечити прийнятну точність моделювання власних частот для резонаторів розміром в десятки довжин хвиль, взагалі

нездатний розрахувати втрати на випромінювання і добротності мод, і повністю непридатний для опису полів в періодичних резонаторах.

Інший популярний інструмент - чисельний метод кінцевих різниць у часовій області (МКРЧО), хоча і корисний в інших областях, непридатний для прямого дослідження власних мод. В його рамках в резонатор поміщають пульсуючий точкове джерело, розраховують змінне поле в деякій точці і відновлюють добротності мод у резонансних сплесків за допомогою чисельного перетворення Фур'є. Кожна з перерахованих операцій привносить чималі і насилу контрольовані похибки і, як результат, МКРВО має невисоку точність.

Перераховані обставини вказують на необхідність моделювання мікролазерів (в тому числі і у вигляді решіток з нанорозмірних елементів), методами електродинаміки як теорії крайових задач для рівнянь Максвелла з точними граничними умовами та умовами випромінювання.

Разом з тим, будь-яке дослідження власних мод *пасивних відкритих резонаторів* істотно знецінюється тим, що в такій моделі відсутня будь-яка можливість опису ще одного фундаментального властивості лазера - наявності порога випромінювання (порогової потужності накачування). Відомі спроби опису порогів робилися на основі квантово-механічних нелінійних моделей, хоча фізично очевидно, що «на порозі» величина електромагнітного поля мізерно мала, і тому дослідження порогів самозбудження лазерів не повинно вимагати обліку нелінійностей.

Зазначений недолік був подоланий, коли в 2000-х рр. в роботах О.Й. Носича і О.І. Смотрової вперше було запропоновано вивчати лазери як відкриті резонатори з активними зонами, заповненими матеріалом з посиленням. Тоді можна сформулювати модифіковану лазерну задачу на власні значення (ЛЗВЗ), в якій кожне власне значення - це пара дійсних чисел: частота випромінювання і граничне значення посилення в матеріалі активної зони. За допомогою такого підходу в дисертації О.І. Смотровой були досліджені моди двовимірних мікролазерів у вигляді циклічних фотонних молекул з активних кругових резонаторів, а також активних одиночних резонаторів складної

форми. Було показано, що найменшими порогами мають моди, близькі до модам шепочичі галереї; в фотонних молекулах поріг може бути додатково знижений завдяки використанню властивостей симетрії для зменшення втрат на випромінювання.

Однак в попередніх роботах ЛЗВЗ не застосовувалася для дослідження частот і порогів мод лазерів на основі періодичних структур. Тим часом, у зв'язку з розвитком нанотехнологій і нанофотоніки, в останні 10 років стали дуже активно вивчатися ефекти аномального (тобто резонансного) проходження оптичних, інфрачервоних і терагерцевох хвиль крізь періодично перфоровані шари і їх аномального відображення від розріджених решіток з наночастинок. Як стало ясно, такі періодичні структури є своєрідними відкритими резонаторами, в яких існує цілий клас власних мод з дуже високою добротністю - граткові моди. Первісною областю їх застосування стали резонансні сенсори показника заломлення для біохімічних додатків. Однак до теперішнього часу основні зусилля дослідників змістилися до проектування і дослідження нових лазерів на основі решіток з металевих, діелектричних або квантових частинок, розташованих на підкладці. Робочими модами в них є саме граткові моди, тому подібні джерела іноді називають «плазмонів» або «гібридними» лазерами з розподіленою зворотним зв'язком. Число періодів в таких пристроях зазвичай велике, від сотень до тисяч, а сам період порівняємо з довжиною хвилі - тому їх можна моделювати як нескінченні решітки.

В силу вищесказаного, тема дослідження сучасна і актуальна.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконувалася в лабораторії мікро і нано оптики відділу квазіоптікі ІРЕ ім. А.Я. Усикова НАН України в рамках наступних держбюджетних робот, а також цільових і конкурсних робот

1. Держбюджетної науково-дослідницької роботи ІРЕ ім. А. Я. Усикова НАН України: «Розробка та впровадження Нових методів обчіслювальної радіофізікі, теоретичне та експериментальне дослідження трансформації електромагнітніх полів гіга- и терагерцового діапазонів в об'єктах и

середовище антропогенного та природного походження» (шифр «Буксир-3», номер держреєстрації 01.06U011975, 2007-2010, виконавець).

2. Держбюджетної науково-дослідної роботи ІРЕ ім. А. Я. Усикова НАН України: «Розробка методів оптики та квазіоптікі для встановлення закономірностей та особливо взаємодії терагерцового випромінювання з фізичними та біологічними об'єктами» (шифр «Ореол», номер держреєстрації 01.11U001079, 2012-2016, виконавець).
3. Конкурсної цільової програми НАН України "Наноструктурні системи, наноматеріалі, нанотехнології": «Мікро та нанорозмірне електродинамічне моделювання оптичних полів у резонаторах з активними зонами з квантових шарів, дротів та точок" (шифр «Поріг», номер держреєстрації 01.07U003983, 2007-2009, виконавець).
4. Державної конкурсній цільової програми "Нанотехнології та наноматеріалі": «Фундаментальні математичні та чисельні дослідження оптичних електромагнітних полів окремих та зв'язаних мікрорезонанорніх лазерів з нанорозмірнімі активними кулями, нитками та стрічкамі» (шифр «Світло», номер держреєстрації 01.10U004737 2010 - 2014, виконавець).
5. Конкурсний наукової теми Міністерства освіти і науки України «Інноваційне чисельного моделювання квазіоптічних фокусуючих систем» (шифр «Фокус», номер держреєстрації 01.09U005351, 2009-2010, виконавець).
6. Програми наукового обміну НАН України з Королівським науковим товариством, Великобританія, спільно з Університетом м. Ноттінгем (конкурсні проекти «Modelling of micro and nano-scale resonators and lenses for dense photonic circuits», 2006-2007 і «Advanced modelling of single and periodic active dielectric resonators for microlasers », 2007-2009).
7. Програми наукового обміну НАН України з Держкомітетом з наукових і технічних досліджень Туреччини, спільно з Університетом Бількент,

Анкара («Innovative electromagnetic modeling of multielement quasioptical focusing systems-mm and terahertz ranges», # 106E209, 2007-2009).

8. Програми наукового обміну НАН України з Академією наук Чеської республіки, спільно з Інститутом фотоніки та електроніки АНЧР, Прага (конкурсний проект «Electromagnetic and numerical modelling of active and nonlinear-optical switches», 2008-2009).

Робота також була частково пов'язана з виконанням наступних аспірантських стипендій міжнародних товариств та фондів:

- «Electromagnetic analysis of natural modes in distrubuted-Bragg-reflector resonators containing active regions», IEEE APS стипендія для аспірантів, 2007;

- «Lasing modes in a dielectric slab microresonator with», Міжнародний Вишеградський фонд, Європейський Союз, спільно з Інститутом фотоніки та електроніки АНЧР, Прага, 2009-2010;

- «Modeling of frequency-selective polarizing reflectors made of sub-wavelength wire grids for millimeter-wave and THz applications», Європейський науковий фонд, спільно з Університетом м. Ноттінгем, 2011-2012;

- «Modeling of biosensors based on the periodic grating», Європейський науковий фонд, спільно з Університетом м. Ноттінгем, 2014.

Мета і задача дослідження. Метою дослідження в дисертації є вивчення власних полів (мод) трьох типів відкритих діелектричних резонаторів з активними зонами. Перші - це одномірні шаруваті діелектричні резонатори. Другі - це нескінченні решітки з діелектричних, металевих або квантових кругових нанониток у вільному просторі. І останні - це різні комбінації перших двох типів, тобто плоскошаруваті діелектричні структури, що містять решітки з срібних або квантових ниток. Кожна модель вивчається і в контексті задачі дифракції, і як задачуя на власні значення.

У першому випадку розглядається відображення, проходження і поглинання плоских хвиль двох поляризацій, нормально падаючих на даний резонатор. У другому випадку діелектричний резонатор (з срібними елементами або без них), розглядається як структура з активною зоною. Тоді

шукаються її власні електромагнітні поля і відповідні їм частоти і пороги самозбудження. Їх дослідження дозволяє виробити рекомендації для зниження порогів. Для досягнення цих цілей розглядаються наступні задачі:

• Побудова ефективної математичної моделі для розрахунку коефіцієнтів відбиття, проходження і поглинання плоскої хвилі, нормально падає на решітку з круглих ниток.

• Систематичний розрахунок коефіцієнтів відбиття, проходження і поглинання плоскої хвилі, пошук резонансних явищ, пов'язаних з існуванням власних мод.

• Побудова математичної моделі, яка адекватно описує електромагнітні поля (моди) у періодичних активних резонаторах, які містять діелектричні, металеві та квантові нанонити.

• Розробка чисельних алгоритмів для розрахунку власних полів, частот і порогів самозбудження мод нескінченних решіток з квантових нанониток.

• Розрахунок власних електромагнітних полів (мод) і їх частот і порогів самозбудження для періодичних відкритих резонаторів, які містять діелектричні, металеві та квантові нанонити і знаходяться, в загальному випадку, в плоскошаруватому середовищі.

Об'єктом дослідження є явища випромінювання і розсіювання електромагнітних хвиль періодичними відкритими резонаторами у вигляді решіток з кругових діелектричних, металевих і квантових ниток, які перебувають, в загальному випадку, в плоскошаруватому діелектричному середовищі.

Предметом дослідження в дисертації є власні електромагнітні поля решіток з кругових квантових нанониток, спектри їх частот і пороги самозбудження, а також резонансні дифракційні поля при розсіянні хвиль зазначеними вище решітками.

Методи дослідження. В основі роботи лежить теорія граничних задач електродинаміки періодичних структур. В рамках ЛЗВЗ, лазерні моди або власні поля періодичних відкритих резонаторів з кругових ниток вивчаються як

рішення однорідних гармонійних рівнянь Максвелла з точними граничними умовами, умовою періодичності і умовою випромінювання на нескінченності. За допомогою апарату рядів Флоке і теорем додавання для циліндричних функцій, кожна з розглянутих граничних задач зводиться до нескінченного матричному рівнянню Фредгольма 2-го роду. При цьому аналітична регуляризація заснована на тому, що поле в присутності одиночної кругової нитки можна знайти в явному вигляді за допомогою розділення змінних. Власні значення, тобто частоти і пороги самозбудження мод, відшукуються чисельно, з контрольованою точністю, як коріння відповідного детермінантного рівняння. Особливо слід вказати, що матеріальні властивості металів в оптичному діапазоні хвиль моделюються на основі експериментальних даних Джонсона і Крісті.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

- вперше встановлена природа так званих граткових мод періодичних відкритих резонаторів, що містять нескінченні решітки з тонких діелектричних або металевих ниток;
- вперше встановлено, що в нескінченній решітці з тонких квантових нанониток граткові лазерні моди мають наднизькі пороги самозбудження;
- вперше показано, що можна домогтися зниження порогів самозбудження граткових мод, збільшуючи відстань між квантовими нитками, зменшуючи їх показник заломлення, а також розміщуючи квантові нитки між розподіленими рефлекторами Брегга;
- продемонстровано, що, в розсіянні і поглинанні хвиль на решітці з металевих нанониток і на бінарної решітці з діелектричних і металевих нанониток, в оптичному діапазоні спостерігаються резонанси на плазмонних модах і на граткових модах;
- вперше виявлено, що в бінарній решітці з квантових і металевих нанониток пороги самозбудження граткових мод можуть бути нижче, ніж плазмонних мод;

- вперше встановлена, на підставі рівнянь Максвелла, оптична теорема для мод періодичного відкритого резонатора з нанониток, що зв'язує поріг самозбудження моди з характеристиками поля моди.
- вперше виведені асимптотичні вирази для комплексних власних частот граткових мод решітки з кругових діелектричних нанониток і порогів самозбудження для таких мод для решітки з квантових ниток, справедливі, якщо радіус ниток або їх контраст з навколишнім середовищем прагнуть до нуля.

Практична значимість отриманих результатів. Запропонований в даній роботі підхід і розроблені чисельні алгоритми можна використовувати для електродинамічного аналізу робочих мод лазерних мікрорезонаторів, в тому числі таких, які містять періодично структуровані активні зони з квантових нанониток або ж решітки з металевих нанониток. Встановлені характеристики мод в таких резонаторах значно поглиблюють розуміння поведінки порогів їх самозбудження при наявності періодичності. Вони також вказують можливі шляхи зниження порогів. Висока ефективність розроблених алгоритмів дозволяє використовувати їх для комп'ютерного проектування і чисельної оптимізації джерел хвиль розглянутої конфігурації.

Особистий внесок дисертанта. Основні результати, наведені в дисертації, належать автору. В написаних у співавторстві роботах [1-7,9-48], цей внесок полягає у виведенні основних рівнянь, розробці комп'ютерних алгоритмів, систематичних розрахунках модових частот і порогів, а також в інтерпретації чисельних результатів для конфігурацій, що містять плоскослоістие резонатори і нескінченні решітки з ниток ; в оглядовій статті [8] він складається в розрахунку прикладів, що ілюструють резонанси на граткових і плазмонних модах при розсіюванні і поглинанні хвиль решітками з кругових срібних нанониток.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи обговорювалися и доповідалися на наступний наукових семінарах: Інституту радіофізікі та електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України (кер. Проф. П.М. Мележик),

Харківського університету повітряних сил (кер. Проф. О.І. Сухаревский), Інституту досліджень з електромагнітної теорії ім. Дж. Гріна Університету м. Ноттінгем, Великобританія (кер. Проф. Т.М. Бенсон), Університету Ерджійес, м Кайсері, Туреччина (кер. Проф. М. Тюркмен). Кроме того, вони доповідалися на наступний міжнародних наукових конференціях:

- IEEE Mediterranean Microwave Symposium, Будапешт (2007),
- Дні дифракції, Санкт-Петербург (2007),
- Workshop on Optical Waveguide Theory and Numerical Modeling, Копенгаген (2007), Ейндховен (2008), Барселона (2012), Лондон (2015),
- Conference on Theoretical and Computational Nanophotonics, м. Бад Хоффен (2008)
- SPIE Photonics Prague, Прага (2008),
- Conference on Transparent Optical Networks, Рим (2007), Афіни (2008), Понта-Делгада (2009), Мюнхен (2010), Стокгольм (2011), Ковентрі (2012), Картахена (2013),
- Asia-Pacific Microwave Conference, Йокогама (2010),
- European Microwave Conference, Манчестер (2011),
- European Conference on Microwave Integrated Circuits, Амстердам (2012),
- IEEE Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Харків (2012), Дніпропетровськ (2014), Львів (2016),
- IEEE Conference on Electronics and Nanotechnology, Київ (2013, 2016),
- Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications, Гданськ (2014)
- IEEE Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers, Алушта (2008), Севастополь (2010), Судак (2013), Одеса (2016)
- IEEE Conference UKRCON, Київ (2017)

Публікації. Результати дисертації опубліковані в 48 наукових роботах, в тому числі 8 статтях в наукових журналах [1-8] і 40 роботах в збірниках праць міжнародних конференцій [9-48].

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Дифракція радіохвиль плоских шаруватих структурах

Розсіювання плоскої електромагнітної хвилі на плоскій границі розділу двох діелектриків з різними відносними діелектричними проницаемостями ε_1 і ε_2 (або коефіцієнтами відбуття $\alpha_{1,2} = \sqrt{\varepsilon_{1,2}}$ - див. Рис. 1.1) - це одна з найпростіших завдань, що вивчаються в електродинаміки [48]. Її рішення можна побудувати в аналітичному вигляді, використовуючи метод поділу змінних. Разом з тим, протяжні плоскі кордону присутні практично у всіх реальних пристроях, що робить таке рішення корисним і важливим.

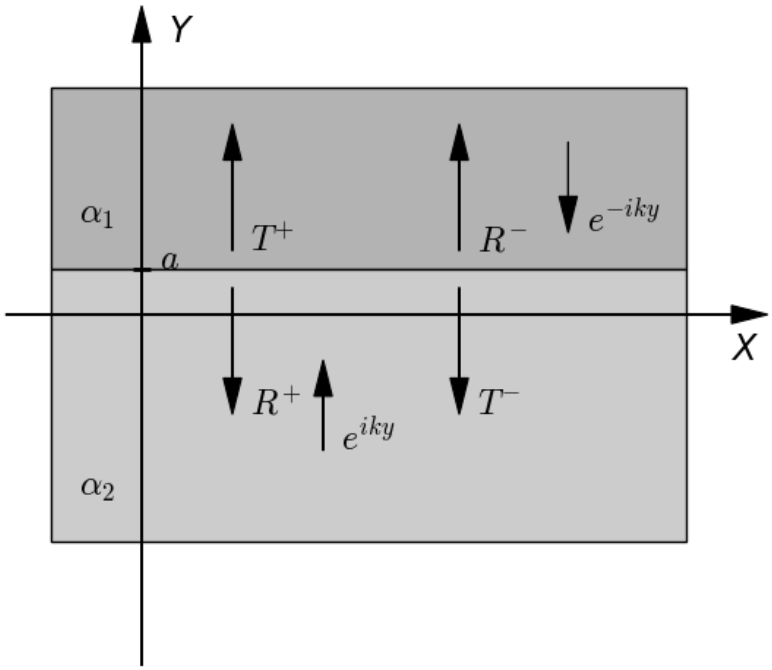


Рис. 1.1 Проходження нормально падаючої плоскої хвилі через плоску межу розділу двох діелектриків.

Для проведення розрахунків таких пристроїв, необхідно розраховувати амплітуди компонент електромагнітного поля $U = E_z$ або $U = H_z$, які повинні задовольняти рівняння Максвелла

$$\nabla^2 U + k^2 \alpha_{1,2}^2 U = 0, \tag{1.1.1}$$

а також граничним умовам на кордонах розділу діелектриків.

Для *E*-поляризації граничні умови для двох середовищ, в яких відшукуються електромагнітного поля з компонентами E_z^1 і E_z^2, мають вигляд

$$E_z^1\Big|_{y=a} = E_z^2\Big|_{y=a}, \tag{1.1.2}$$

$$\frac{1}{\partial y} E_z^1\Bigg|_{y=a} = \frac{1}{\partial y} E_z^2\Bigg|_{y=a}. \tag{1.1.3}$$

Для *H*- поляризації -

$$H_z^1\Big|_{y=a} = H_z^2\Big|_{y=a}, \tag{1.1.4}$$

$$\frac{1}{\partial y}\frac{1}{\varepsilon_1} H_z^1\Bigg|_{y=a} = \frac{1}{\partial y}\frac{1}{\varepsilon_2} H_z^2\Bigg|_{y=a}. \tag{1.1.5}$$

Додатково необхідно враховувати умову випромінювання, яке в одновимірної задачі (якщо залежність від часу має вигляд $e^{-i\omega t}$) полягає в тому, що розсіяне поле представляється у вигляді плоских хвиль, що йдуть від кордону розділу. Наприклад, якщо первинна хвиля падає із середовища 1, то розсіяне поле у верхній півплощині має мати вигляд $Re^{ik\alpha_1 y}$, а в нижній - $Te^{-ik\alpha_2 y}$.

Виконання даних умов гарантує єдність розв'язку. Метод розділення змінних дозволяє отримати це рішення в явному вигляді. Відповідні

аналітичні вирази для коефіцієнтів відбиття і проходження ($R^{\pm}$ і $T^{\pm}$) називаються формулами Френеля [49]

Використовуючи плоскі шаруваті конструкції, можна створити прості і досить ефективні одномірні резонатори, а також рефлектори, що забезпечують практично повне відображення електромагнітних хвиль, наприклад відбивачі Брегга. Такі рефлектори складаються з кінцевого числа пар двох шарів різних діелектриків товщиною в чверть довжини хвилі в даному матеріалі. У загальному випадку, будь-яка одномірна плоскошарувата структура (Рис. 1.2) визначається кількістю шарів N, положенням кордонів шарів $a_1, a_2, ..., a_{N-1}, a_N$ і показником заломлення кожного шару $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{N-1}, \alpha_N$ - див. Рис. 1.1.2.

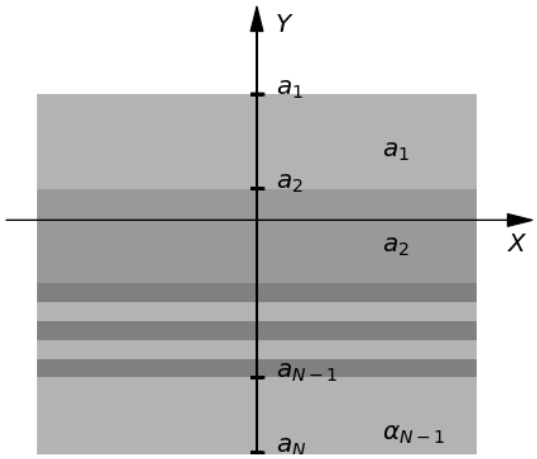


Рис. 1.2 Приклад багатошарової одновимірної плоскошаруватої структури.

Метод матриць переходу [50], описаний в Розділі 2, дозволяє побудувати на кожному кордоні двох діелектриків матрицю переходу поля через неї (Рис. 1.1.1), а згодом, перемноживши їх, побудувати коефіцієнти відбиття і проходження через всю багатошарову структуру. У даній дисертаційній роботі будуть розглядатися як деякі багатошарові одновимірних плоскошароваті структури, так і комбінації плоских структур з

нескінченними решітками (періодичними структурами) з ниток кругового поперечного перерізу.

1.2 Дифракція хвиль на нескінченних решітках круглих ниток

Незважаючи на те, що існують підстави вважати, що дифракційна решітка могла бути відкрита американським астрономом Ріттенхаузом (D. Rittenhouse) в кінці 18-го сторіччя, зазвичай це приписується німецькому оптику Фраунгофера. У всякому разі, Фраунгофер був першим фізиком, який систематично використовував решітки в 1823 році в дослідах по спектральному аналізу світла.

Явище, яке привернуло головну увагу, це властивість решіток "розкладати" падаюче "біле" світло на "складові кольори", слід зазначити що, чим менше період решітки в порівнянні з довжиною хвилі світла, тим більше кутова відстань між кольорами. Оптичні решітки виготовлялися нанесенням подряпин на скло, і таким чином представляли собою періодично обурену площину розділу двох середовищ. У міжнародній літературі за такими структурами закріпився термін "gratings". Поляризаційні властивості оптичних дифракційних решіток були відкриті Физо (Fizeau) в 1861 р, проте не знайшли застосування. Тільки досліди Г. Герца в 1895 р., В яких була доведена тотожність світла і електромагнітних хвиль [51], відродили цей інтерес, але, на відміну від оптики, для хвиль, довжини яких були значно більше періоду решітки. Насправді, решітка Герца була суттєво іншою, ніж грати, що застосовувалися в оптиці - вона була зроблена з мідних дротів діаметром 1 см, натягнутих на рамку, з періодом 3 см. Згодом решітки з металевих елементів (дротів круглого і некруглого перетину, смуг і т.д.), розташовані у вільному просторі або укріплені на поверхні прозорої підкладки, отримали назву "grids". В російській мові обидві структури називають однаково – "решетки", у цій роботі ми будемо використовувати термін решітка. Довжина хвилі в дослідах Герца дорівнювала 66 см, що перевищувало період в 22 рази - таким чином, решітка Герца була

дифракційної в оптичному сенсі, оскільки не породжувала ніякої іншої хвилі, крім відбитої. У разі якщо довжина хвилі порівнянна з періодом решітки або менше його, відображення і пропускання набувають значно складніший характер. При таких значеннях довжини хвилі можна спостерігати безліч різноманітних різких варіацій розсіяного поля як функції довжини хвилі. Завдяки експериментальній роботі Вуда 1902 г. [62] вони мають загальну назву «аномалії Вуда».

Найпростішим варіантом для численного та аналітичного аналізу є нормальне падіння плоскої хвилі - в цьому випадку деякі з вище згаданих ефектів спостерігаються, якщо період збігається з цілим числом довжин хвиль - такі «аномалії» були вперше помічені Релєєм (John William Strutt, Third Baron Rayleigh) в 1907 р [63]. Він ввів в практику розкладання розсіяного гратами поля в ряд, званий тепер поруч Релея (а також рядом Флоке), а по-суті, є поруч Фур'є для періодичної функції.

Релей визначив, що зазначені резонанси відповідають появі нових плоских хвиль, що поширюються в розсіяному гратами поле. Крім цього, присутні інші явища - резонанси, породжені формою і матеріалом елементів решітки, а також періодичністю. Повне дослідження цих явищ можливо тільки за допомогою чисельних методів електродинамічного моделювання, яке, в свою чергу, є нетривіальним завданням. Вона може бути спрощена можливістю розгляду поля тільки на одному періоді решітки, але це вимагає введення в розгляд функції Гріна періодичного простору, яка будується за допомогою нескінченних сум.

З точки зору математичної фізики, завдання розсіювання плоскої хвилі решітьками з ниток кругового поперечного перерізу, розташованих з періодом p уздовж осі X - це гранична задача для рівняння Гельмгольца,

$$(\Delta + k^2\varepsilon)U(x,y) = 0, \qquad (1.2.1)$$

де Δ - двовимірний оператор Лапласа, параметр k - хвильове число у вільному просторі, параметр ε приймає значення ε_1 всередині нитки і ε_2 поза них, а функція $U(x,y)$ є $z-$компонент електромагнітного поля (тобто, E_z чи H_z), яка повинна задовольняти граничним умовам на поверхні нитки, тобто на колі радіусу a в локальній системі полярних координат $\{r_n, \varphi_n\}$,

$$E_z^1\Big|_{r_n=a} = E_z^2\Big|_{r_n=a}, \quad \frac{1}{\partial r_n} E_z^1\Big|_{r_n=a} = \frac{1}{\partial r_n} E_z^2\Big|_{r_n=a} \tag{1.2.2}$$

$$H_z^1\Big|_{r_n=a} = H_z^2\Big|_{r_n=a}, \quad \frac{1}{\partial r_n}\frac{1}{\varepsilon_1} H_z^1\Big|_{r_n=a} = \frac{1}{\partial r_n}\frac{1}{\varepsilon_2} H_z^2\Big|_{r_n=a} \tag{1.2.3}$$

Крім цього, поле повинно задовольняти умові локальної кінцівки енергії,

$$\int_D (|\,k\,U\,|^2 + |\,\mathrm{grad}U\,|^2 dS < \infty, \quad D \subset \mathbf{R}^2, \tag{1.2.4}$$

і умові випромінювання на нескінченності, яке виключає присутність інших хвиль, які приходять до решітки, окрім падаючої.

Перш, ніж записати цю умову, слід ввести падаючу під кутом Γ до осі плоску хвилю

$$U^{in}(x,y) = e^{iky\sin\Gamma + xcox\Gamma}, \tag{1.2.5}$$

і зазначити, що вона є квазі-періодичною функцією координати з періодом, тобто и заметить, что она является квази-периодической функцией координаты x с периодом p, то есть

$$U^{in}(x,y) = U^{in}(x+p,y)e^{ip(\Gamma-\pi/2)} \tag{1.2.6}$$

Тоді з періодичності граничних умов (1.2.2), (1.2.3) і теореми Флоке випливає, що і розсіяне поле повинно мати властивість (1.2.6). Завдяки цьому умова випромінювання можна сформулювати наступним чином: на відстані далекой від решітки розсіяне поле, має бути представимо у вигляді ряду що сходиться,

$$U^{sc}(x,y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s e^{ik\pi_s x} e^{-k\tau_s y}, \quad |y| \to \infty. \tag{1.2.7}$$

де π_s і τ_s виписани в (3.2.4, 3.2.5) для $\Gamma = \pi/2$.

При виконанні умов (1.2.1) - (1.2.7) розв'язок граничної задачі єдино для будь-якого дійсного параметра, що доводиться «від зворотнього» за допомогою теореми Пойнтінга, записаної для поля U на елементарному періоді решітки (див. Розділ 3).

Слід зазначити, що, фактично, умова (1.2.7) має виконуватися для всіх $|y| > y_g$, де - півширина «області решітки», тобто смуги, в якій містяться всі її елементи. Ця умова іноді називають умовою випромінювання Свєшнікова [74]. Як буде видно надалі, умова (1.2.7) може бути використано і при дослідженні власних станів решітки (мод періодичного відкритого резонатора) - рішень однорідної граничної задачі з $U^{in} = 0$ і комплексним частотним параметром [65, 66].

Для чисельного моделювання розсіювання хвиль решітками з круглих ниток, було розроблено декілька підходів і методів. Найбільш успішним виявився метод, запропонований В. Тверським (Victor Twersky), який зводить задачу розсіювання плоскої хвилі [68, 69] до нескінченного матричного рівнянню. Фактично, цей метод використовує ту обставину, що розсіювання

хвиль одиночним круговим циліндром може бути вирішено в аналітичній формі за допомогою поділу змінних.

Відправною точкою в методі Тверського, детально описане в Розділі 3, є запис рішення у вигляді ряду Фур'є від азимутальної змінної в локальних полярних координатах кожної нитки. Такі ряди задовольняють рівняння (1.2.1) і дозволяють застосувати граничні умови (1.2.2) або (1.2.3) до кожного азимутальної порядку. Облік періодичності структури, разом з теоремами додавання для циліндричних функцій, призводить до нескінченних сум функцій Ханкеля. Ці граткові суми, згадані вище, є основним інструментом для вивчення подібних задач. Дані суми сходяться дуже повільно і непридатні для чисельного рішення, якщо не застосовувати до них методів прискорення збіжності. Тому довгий час зусилля дослідників були зосереджені на розробці методів перетворення граткових сум - див. роботи [70-74].

Тоді з періодичності граничних умов (1.2.2), (1.2.3) і теореми Флоке випливає, що і розсіяне поле повинно мати властивість (1.2.6). Завдяки цьому умова випромінювання можна сформулювати так: далеко від решітки розсіяне поле $U^{sc} = U - U^{in}$, має бути представимо у вигляді сходиться ряду,

$$U^{sc}(x,y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s e^{ik\pi_s x} e^{-k\tau_s y}, \quad |y| \to \infty, \tag{1.2.7}$$

де π_s і τ_s виписані в (3.2.4, 3.2.5) для $\Gamma = \pi/2$.

При виконанні умов (1.2.1) - (1.2.7) розв'язок граничної задачі єдино для будь-якого дійсного параметра k, що доводиться «від противного» за допомогою теореми Пойнтінга, записаної для поля U на елементарному періоді решітки (див. Розділ 3)

Зауважимо, що , фактично, умова (1.2.7) має виконуватися для всіх $|y| > y_g$, де y_g - півширина «області решітки», тобто смуги, в якій містяться всі її елементи. Ця умова іноді називають умовою випромінювання

Свєшнікова [55]. Як буде видно надалі, умова (1.2.7) може бути використано і при дослідженні власних режимів решітки (мод періодичного відкритого резонатора) - рішень однорідної граничної задачі з $U^{in} = 0$ і комплексним частотним параметром k [56, 57].

Для чисельного моделювання розсіювання хвиль решітками з круглих ниток, дослідники розробили кілька підходів і методів. Найбільш успішним виявився метод, запропонований В. Тверським (Victor Twersky), який зводить задачу розсіювання плоскої хвилі [59, 60] до нескінченного матричному рівнянню. Фактично, цей метод використовує ту обставину, що розсіювання хвиль одиничним круговим циліндром може бути вирішено в аналітичній формі за допомогою поділу змінних. Звернення цієї ж частини в завданні для решітки дає матричне рівняння, яке є рівнянням другого роду.

Відправною точкою в методі Тверського, детально описане в Розділі 3, є уявлення рішення у вигляді ряду Фур'є від азимутальної змінної в локальних полярних координатах кожної нитки. Такі ряди задовольняють рівнянню (1.2.1) на кожному члені розкладанні дозволяють застосувати граничні умови (1.2.2) або (1.2.3) до кожного азимутальної порядку. Врахувавши періодичністчь структури, разом з теоремами додавання для циліндричних функцій, можна отримати нескінченні суми функцій Ханкеля, або граткові суми. Таки суми, згадані вище, є основним інструментом для вивчення подібних задач. Дані суми сходяться дуже повільно і непридатні для чисельного рішення, якщо не застосовувати до них методів прискорення збіжності. Тому довгий час зусилля дослідників були зосереджені на розробці методів перетворення граткових сум - см. [60-66].

Фундаментальним досягненням В. Тверського є те, що, застосувавши стандартні методи, він запропонував надійний підхід до сумування граткових сум, використовуючи коефіцієнти Бернуллі. Швидкість збіжності цих уявлень може бути збільшена, якщо для них застосувати метод Крумера [63].

Ще один підхід був запропонований К. Ясумото, який запропонував застосовувати інтегральне представлення функцій Ханкеля [62].

Використовуючи формулу Пуассона, він отримав сходяться уявлення для граткових сум у вигляді сходяться невласних інтегралів. Разом з тим, недоліком цього методу є необхідність чисельного інтегрування, що, в свою чергу, позначається на часі і точності результату. Крім того, при розрахунках виникає необхідність вводити новий параметр, що визначає верхня межа інтегрування.

Узагальнюючий метод був запропонований А. Морозом [64, 65], який використовував метод Евальда. Даний спосіб вводить новий параметр, що відокремлює інтегральну частину від сум за коефіцієнтами Бернуллі.

К. Ясумото також виписав рішення задачі для решітки з однакових ниток за допомогою операторного методу [65-72], який передбачає введення окремих операторів, пов'язаних з 1) періодичністю і 2) одним осередком решітки (елементарним періодом). Це дозволило йому узагальнити рішення на задачі з більш складною побудовою осередку періуду. Наприклад, в роботі [65] було розглянуто розсіювання плоских хвиль двох поляризацій на решітці з двома або кінцевим числом різних ниток на періоді. В [67] розглядалася решітка з ниток з включеннями з довільного матеріалу. Операторний метод дозволив отримати рішення задачі розсіювання на структурі, що складається з кінцевого числа нескінченних решіток [68]. Також, цей метод [70] зручний для дослідження решітки з ниток в діелектричному шарі.

На закінчення даного підрозділу слід вказати на два суттєвих недоліка, притаманних усім перерахованим робіт, починаючи з робіт Тверського 1950-х рр. По-перше, при розкладанні поля в азимутальні ряди Фур'є в локальних системах координат кожної нитки, невідомі коефіцієнти вибиралися найпростішим, але не оптимальним, чином. Це призводило до експоненціального зростання, з індексом, коефіцієнтів для внутрішнього поля і до експоненціального зменшенням подібних коефіцієнтів для зовнішнього поля. В результаті матричні рівняння, отримані Тверським (і згодом застосовувалися Охтака, Ясумото, Майстре, Кавакліоглу, Аль-Шербені і іншими), були формально рівняннями другого роду, але не були

рівняннями Фредгольма. З силу цього вони, строго кажучи, не можуть бути основою розрахункового алгоритму для чисельного моделювання - такий алгоритм розходиться при збільшенні порядку усічення матриці. Більшість авторів перерахованих вище робіт нехтували цією обставиною, хоча деякі з них помічали зазначену розбіжність і зазвичай приписували її «поганої обумовленості». На щастя, такі дефектні алгоритми, при невеликому порядку усічення, здатні давати рішення з відносною похибкою близько 10^{-2}, чого нерідко досить для практики.

Мабуть, вперше цей недолік був подоланий В. Г. Сологубом в звіті, який згодом перетворився в главу у відомій книзі [57]. Для того щоб отримане матричне рівняння було фредгольмовим, досить в рівняннях Тверського зробити заміну невідомих коефіцієнтів, яка забезпечує їх алгебраїчне поведінку при зростанні індексу. У даній дисертаційній роботі цей прийом використовується систематично, так що все чисельні результати отримані за допомогою алгоритмів, що сходяться. Зауважимо, що нещодавно цей же прийом був «відкритий» авторами робіт [73, 74], які, втім, не зуміли зрозуміти, що отримали фредгольмовое рівняння другого роду, а тільки помітили, що всі проблеми з «поганою обумовленістю» зникли.

По-друге, чисельні результати для решіток з діелектричних ниток, наведені в роботах [75, 76], демонструють резонансну поведінку коефіцієнтів відбиття і проходження як функцій нормованої на період частоти. Однак ні в одній з цих робіт не було помічено, що частоти деяких з резонансів прагнуть до аномалій Релея, якщо період зростає при фіксованому радіусі ниток. Ці резонанси - резонанси на так званих граткових модах, що відрізняються високою добротністю. Вони будуть являти собою основний об'єкт дослідження в даній дисертаційній роботі.

1.3 Власні моди пасивних відкритий резонатор

Відкритими резонаторами в електродинаміки та фізики мікрохвиль називають такі резонатори, які знаходяться в необмеженої зовнішньому середовищі - наприклад, у вільному просторі. До таких резонаторам відносяться, зокрема, металеві порожнисті резонатори з отворами, а також всі діелектричні резонатори будь-якої конфігурації. Як відомо, в резонаторах існують характерні дискретні значення частоти електромагнітного поля, на яких поле приймає вид стоячій хвилі з високою амплітудою. Ці стану поля описуються рішеннями однорідних (тобто, за відсутності джерел) крайових задач для системи гармонійних рівнянь Максвелла з граничними умовами. Якщо область, в якій відшукується поле, нескінченна (відкрита), то теорема Пойнтінга дозволяє встановити, що власні частоти можуть бути тільки комплексними; це відноситься, таким чином, до будь-якого діелектричні резонатору.

У зв'язку з цим, традиційне дослідження власних режимів (мод) для діелектричного резонатора полягає в знаходженні таких комплексних частот ω або хвильових чисел $k = \omega / c$ (c - швидкість світла у вакуумі), при яких існують нетривіальні рішення однорідної крайової задачі для електромагнітного поля у відкритій області з крайовими умовами на межах розділу, які відповідають безперервності його тангенціальних компонент - см. (1.2.2) і (1.2 .3). Якщо межа діелектричного резонатора містить гострі ребра або вершини, то в постановку задачі необхідно також включити умова локальної обмеженості енергії поля в будь-якій області, що містить точки і лінії порушення гладкості границі (1.2.4).

Для відкритого резонатора слід доповнити постановку задачі про моди умовою на нескінченності, адекватним досліджуваної задачі, тобто враховує її розмірність і узгодженим з принципом випромінювання. В одновимірному випадку, де поле - одномірна, тобто, плоска, хвиля, цю умову можна записати як вимога до поля поза резонатора, при $|x| > const$, мати вигляд плоскої хвилі, що йде, з комплексним k,

$$U(x) = Ae^{ik|x|} \tag{1.3.1}$$

У двовимірному випадку звичайна в задачах розсіювання хвиль умова Зоммерфельда (з речовим хвильовим числом) не є адекватним, якщо в ньому вважати k комплексним. Як було показано Райхард [77], в цьому випадку адекватним є вимога представимости поля при $r > const$ у вигляді ряду, що сходиться, а саме

$$U(r,\varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s H_s^{(1)}(kr) e^{is\varphi}, \quad k \in \Lambda, \tag{1.2.6}$$

де Λ - ріманова поверхня функції $\mathrm{Ln}k$. Слід зазначити, що, фактично, умова Райхард має виконуватися для всіх $r > r_g$, де r_g - радіус мінімального кола, що містить всі елементи резонатора.

Для одновимірної задачі на власні значення немає різниці між двома поляризаціями поля, а для двовимірної задачі вона є і проявляється в тому, що коефіцієнти в граничних умовах (1.2.2) і (1.2.3) різні.

Форми і розміри діелектричних резонаторів різноманітні і залежать від діапазону довжин хвиль і конкретних програм. У фізиці і техніці мікрохвиль найчастіше зустрічаються резонатори у вигляді кінцевого кругового циліндра або паралелепіпеда, а їх розміри зазвичай можна порівняти з довжиною хвилі. Основними модами в них є квазі-TE_{01} або квазі-TE_{11}, відповідно.

Найбільш важливою інтегральною характеристикою властивостей будь-якого резонатора є його добротність (Q-фактор). Ця величина має два еквівалентних один одному визначення: як відношення дійсної частини комплексної власної частоти до подвоєною уявної частини і як відношення запасеної в резонаторі енергії до втрачанної, в середньому за період коливань,

$$Q_i = \frac{k_i'}{2k_i''}, \qquad (1.3.1)$$

де $k = k' + ik''$ - комплексне хвильове число.

У всякому діелектричному резонаторі втрати енергії складаються з втрат на випромінювання і втрат в матеріалі резонатора. Перші з них контролюються, на сам перед, контрастом між матеріалом резонатора і матеріалом навколишнього середовища, тобто різницею між діелектричними проникністями. У разі магнітною його діелектрична проникність ε дорівнює квадрату показника заломлення ν^2, так що, при моделюванні, вибір між цими двома параметрами довільний. В реальних умовах втрати на випромінювання різко зростають, якщо характерний розмір шорсткості поверхні діелектричного резонатора стає порівнянним з довжиною хвилі.

Всі реальні діелектричні резонатори мають і втрати в матеріалі, з якого вони виготовлені. Кристалічні матеріали зазвичай мають діелектричну проникність між 2.5 і 10 і тангенс втрат 10^{-6} і нижче, хоча існують промислово виготовлені матеріали з проникністю до 100-150 і тангенсом втрат 10^{-4} [77].

Як відомо, втрати в діелектрику характеризуються за допомогою уявної частини діелектричної проникності $\mathrm{Im}\,\varepsilon$ (макроскопічного параметра). Для немагнітних матеріалів з таким же успіхом можна використовувати уявну частину показника заломлення $\mathrm{Im}\,\nu$. Ще однією величиною, що використовується для цього, є «тангенс кута втрат» - відношення уявної і дійсної частин проникності. Ця величина досягає 10^{-9} для деяких кристалічних матеріалів, які використовуються для виготовлення оптичних діелектричних резонаторів.

З точки зору електродинаміки фундаментальний факт, що *всі діелектричні тіла є відкритими резонаторами*, нерідко з високими Q-факторами, серйозно ускладнює їх чисельне моделювання з високою

точністю. Це відноситься як до задач їх збудження сторонніми джерелами, так і до задач без джерел, тобто, на власні частоти та моди.

Якщо частота збудження пасивного відкритого резонатора (речова величина) близька до дійсної частини комплексної власної частоти будь-якої з його власних мод, то повне поле всередині і зовні резонатора показує резонансну поведінку. При цьому воно набуває форми, близьку до поля відповідної моди (власного коливання), а його амплітуда зростає пропорційно Q-фактору моди. Так, наприклад, будь-яка діелектрична лінза, розміри якої вимірюються навіть десятками довжин хвиль, одночасно є і відкритим резонатором. Як тільки частота джерела наближається до резонансної, фокусування поля лінзою порушується через порушення поля, близького до власного, яке може мати багато плям з високою інтенсивністю. Точний опис взаємодії променевих і модових механізмів розсіювання хвиль являє собою досить нетривіальну наукову задачу.

Слід підкреслити тісний зв'язок задач розсіяння хвиль з речової частотою і завдань на власні значення з комплексними частотами. Цей зв'язок має двоякий характер. З одного боку, правильна інтерпретація поведінки поля, розсіяного, наприклад, діелектричним тілом, неможлива без аналізу власних мод цього тіла як відкритого резонатора. З іншого боку, чисельне відшукання спектра власних частот і відповідних Q-факторів для мод резонатора зазвичай проводиться ітераційним методами. Ці методи, для ефективної роботи, вимагають початкових значень комплексної частоти, близьких до точних - такими можуть бути частоти резонансних сплесків в завданні розсіювання. Таким чином, завдання розсіювання хвиль необхідно досліджувати разом з завданнями на власні значення.

Однією з новітніх областей застосування мініатюрних діелектричних резонаторів є мікролазери, що випромінюють в діапазоні від терагерцевих хвиль до видимого світла і навіть ультрафіолету [78-79]. Як вже говорилося, лазер можна розглядати як відкритий резонатор, проте не пасивний, а оснащений активною зоною (див. Нижче, підрозділ 1.4). Такі лазери можуть

мати вигляд тонких дисків з гладким краєм і діаметром в одиниці або десятки мікрон. Якщо диск має кругову форму, то в ньому існують моди шепоче галереї з низькими порогами самозбудження, проте їх випромінювання має невисоку спрямованість. Тому пошук оптимальної форми тонкого резонатора, що забезпечує поліпшену спрямованість випромінювання, є важливим напрямком дослідження і розробки таких лазерів.

Як вже зазначалося у Вступі, останнім часом активно розробляються інші лазери - засновані на решітках (періодичних структурах) з сотень і тисяч нанорозмірних частинок, ниток і стрічок.

1.4 Лазерна задача на власні значення

Отже, всякий лазер можна розглядати як відкритий резонатор, оснащений активною зоною. У відсутності накачування такий резонатор пасивний, і його моди - дискретні стану поля, що мають втрати енергії на випромінювання; тому вони мають комплексні частоти і, тим самим, загасають в часі. Однак, при накачуванні активної зони, її матеріал генерує поле, оскільки це матеріал з посиленням або з негативними втратами. При деякому значенні посилення в матеріалі, яке називають пороговим посиленням, втрати на випромінювання і в матеріалі резонатора можна компенсувати. Математично це означає, що власна частота моди виходить на речову вісь, тобто поле моди перестає затухати в часі - лазер знаходиться на порозі самозбудження.

Моди будь-яких резонаторів описуються рішеннями рівнянь Максвелла з відповідними граничними умовами. Будемо вважати, що всередині резонатора є активна зона (Рис. 1.3), яка може не збігатися з усім резонатором. Контури резонатора S_p і активної зони S_a вважатимемо гладкими кривими з безперервними нормалями.

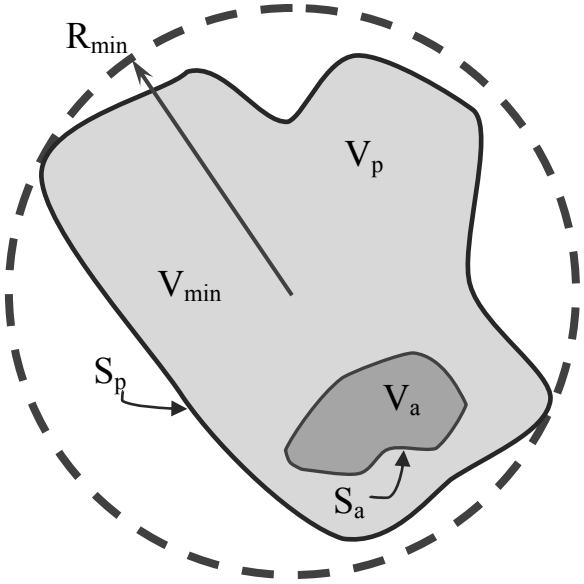


Рис. 1.3 Загальна геометрія діелектричного резонатора з активною зоною.

Щоб наочно пояснити, як змінюється власна частота діелектричного резонатора, повністю або частково заповненого матеріалом з втратами, при зміні уявної частини показника заломлення від позитивних значень (поглинання) до негативних (посилення), на рис. 1.5 показана її траєкторія на комплексній площині.

Частота відзначена індексом i, щоб підкреслити дискретність власних частот. Симетрія розташування власних частот щодо уявної осі випливає із рівноправності напрямків часу $\pm t$, для гармонійних процесів. Якщо розглядається двовимірна задача, то на головному аркуші комплексної площині є розріз.

Нагадаємо, що якщо матеріал хоча б частини відкритого резонатора має втрати, $\mathrm{Im}\nu \geq 0$, то при залежності від часу $\sim e^{-i\omega t}$ все його власні частоти лежать строго в нижній півплощині. При зменшенні $\mathrm{Im}\nu$ до нуля, кожна з частот піднімається до рівня, відповідного втрат даної моди на випромінювання. При подальшій зміні уявної частини показника заломлення, коли вона набуває негативну уявну частину, $\mathrm{Im}\nu < 0$, власна частота піднімається далі і, в принципі, може перетнути речову вісь (див. Рис. 1.4).

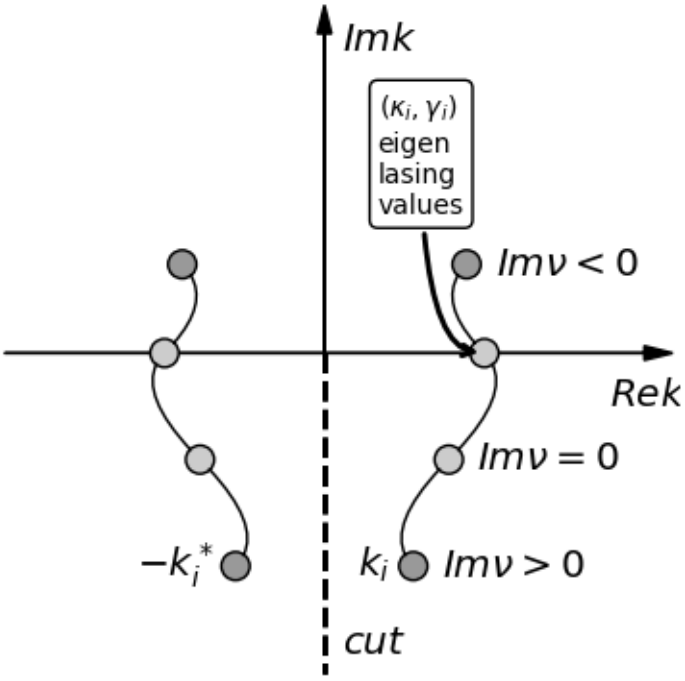


Рис 1.4 - Траєкторія руху власної частоти діелектричного резонатора на комплексній площині при зміні уявної частини показника заломлення $\mathrm{Im}\nu$ від позитивних до негативних значень.

Завдяки зазначеному поведінки комплексних власних частот, ми можемо шукати таке значення уявної частини показника заломлення $\gamma = -\mathrm{Im}\nu > 0$, яке забезпечує речовинність власної частоти даної моди відкритого резонатора - це і є ЛЗВЗ. Слід підкреслити, що порогові значення $\mathrm{Im}\nu$ різні для різних мод. Відзначимо, що, внаслідок відомої зв'язку між відносної діелектричної проникністю і показником заломлення магнітною, $\mathrm{Im}\varepsilon = \mathrm{Im}(\nu^2) = 2\,\mathrm{Re}\nu\,\mathrm{Im}\nu = 2\alpha\gamma$, зазначену задачу можна розглядати і для порогового значення $\mathrm{Im}\varepsilon$.

Математично, лазерна задача вимагає, щоб поле підпорядковувалося рівняння Гельмгольца (1.1.1), зі своїм коефіцієнтом ν^2 в кожній області, а граничні умови (1.2.2) - (1.2.5) або (1.1.2) - (1.1.5) виконувалися на всіх границях. При цьому показник заломлення всередині активної зони має комплексне значення, $\nu_a = \alpha_a - i\gamma$, де $\alpha_a > 0$ - відомий оптичний показник заломлення, а $\gamma > 0$ - невідоме посилення в матеріалі. Крім того, завдяки матеріальність *k,* замість умови Райхард (1.2.6), функцію поля можна

підпорядкувати умові випромінювання Зоммерфельда,

$$U(r,\varphi) \sim (2/i\pi kr)^{1/2} e^{ikr}\Phi(\varphi), \quad k = \mathrm{Re}\,k \qquad r \to \infty, \tag{1.4.1}$$

Слід відшукати такі значення пар чисел (k,γ), при яких існують нетривіальні рішення даної граничної задачі. Підкреслимо, що тут, замість пошуку комплексних частот, потрібно відшукувати пари дійсних чисел, k_n і γ_n. Перше з них є частотою випромінювання лазерної моди, а друге - порогове значення посилення в матеріалі, «поріг моди». Природно, таку електродинамічну ЛЗВЗ можна сформулювати і для повної тривимірної моделі діелектричного резонатора з активною зоною.

З точки зору загальної теорії, важливо, що якісні характеристики лазерних власних значень можуть бути встановлені без їх обчислення. Таке дослідження базується на аналітичній регуляризації [80,81], тобто на еквівалентному зведенні даного завдання до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, і застосуванні операційних узагальнень теорем Фредгольма. Воно дозволяє встановити, що:

1) безліч власних значень ЛЗВЗ є чисто дискретним на площині (k,γ),

2) кожне з власних значень має кінцеву кратність,

3) кожне з власних значень залежить від геометрії і показника заломлення частково-безперервним чином,

4) безперервність може порушуватися лише в точках збігу власних значень,

5) кінцеві точки накопичення власних значень на площині (k,γ) відсутні.

Крім того, всі пороги позитивні, $\gamma_n > 0$, оскільки будь-яка мода лазера має втрати енергії на випромінювання (інакше це не лазер).

Зауважимо ще, що завдяки умові (1.4.1) поля лазерних мод не ростуть експоненціально на нескінченності, як моди пасивних резонаторів. Ця обставина дозволяє сказати, що ЛЗВЗ уявляє адекватну задачу для опису

випромінювання світла лазером як фізичного явища.

Слід зазначити деяку схожість ЛЗВЗ, як модифікованої задачі на власні значення, з методом узагальнених власних коливань [82]. На відміну від ЛЗВЗ, в цьому методі частота вважається заданою, а власним значенням служить комплексна діелектрична проникність. Тому такий підхід непридатний до аналізу лазерних мод.

Відшукання зв'язку комплексного показника заломлення активної зони і, зокрема, його уявної частини, з потужністю накачування і щільністю інжектіруемих носіїв заряду виходить за рамки класичної електродинаміки. Її можна побудувати в рамках, наприклад, дворідинної квантової моделі активного середовища - см. [83].

Слід зазначити, що ще в 1970-і роки з'явилися кілька робіт, в яких досліджувалися незвичайні ефекти при розсіянні хвиль на «активних частинках», виготовлених з матеріалу з посиленням [77]. Однак це дослідження не отримало розвитку, оскільки було помічено, що така постановка не гарантує єдність розв'язку задачі розсіювання [84]. Дійсно, при збігу речової частоти падаючої хвилі з речової власною частотою частки, рішення не існує.

Задача на власні значення вільна від цього дефекту постановки, тому в різний час в деяких публікаціях відшукувалися комплексні власні частоти деяких відкритих резонаторів, а потім визначалися значення посилення в активній зоні, необхідні для звернення уявної частини частоти в нуль [85-90]. Однак до робіт [80,81, 91-93] поріг самозбудження не розглядався як свого значення для електродинамічної граничної задачі.

В цьому немає нічого дивного, оскільки лазери виникли як пристрої, в яких розміри дзеркал і активної зони вимірювалися багатьма тисячами довжин хвиль. Їх моделювання зводилося до підрахунку довжини ГО шляху променя по замкнутій траєкторії в одновимірної моделі резонатора типу Фабрі-Перо. Ця теорія лазерних мод називається «Напівкласична» (semiclassical laser theory), причому приставка «напів», мабуть, покликана

відобразити явну неадекватність цієї моделі навіть для двовимірного випадку або при обліку кінцівки дзеркал резонатора.

Надалі ситуація стала змінюватися в бік зменшення розмірів лазерних резонаторів. У 1980-і рр. з'явилися напівпровідникові світлодіоди і лазери з резонаторами на ефекті Брегга з розмірами в сотні довжин хвиль. У них на поверхню активного шару наносилася періодична структура з періодом, яке можна порівняти з довжиною хвилі. До таких лазерів модель Фабрі-Перо непридатна, і дзеркала взагалі відсутні. Теорія таких лазерів досі погано розроблена, що відбивається в їх не цілком ясному назві - «лазери з розподіленим зворотним зв'язком» ЛРЗЗ (distributed feedback lasers, DFBL) [94-96].

Ще пізніше, в 1990-і рр., були запропоновані напівпровідникові, а потім і полімерні і кристалічні лазерні резонатори розміром в декілька довжин хвиль, леговані, відповідно, барвниками і іонами рідкоземельних елементів [78, 97-102]. Зазвичай вони мають вигляд тонкого диска кругової або некругової форми. У таких лазерах дзеркала також відсутні, і «зворотний зв'язок» також «розподілена» по всьому резонатору, але відповідний термін вже був зарезервований за лазерами ЛРЗЗ, тому їх стали називати «мікрорезонаторнимі лазерами» МРЛ (microcavity lasers, MCL). Необхідність досить точного моделювання подібних мініатюрних джерел електромагнітних хвиль зажадала, нарешті, згадати про те, що моди відкритих резонаторів описуються рішеннями граничних задач на власні значення для рівнянь Максвелла.

Нарешті, в останні 5-6 років стали активно розроблятися напівпровідникові лазери, які поєднують в собі риси і ЛРЗЗ, і МРЛ, оскільки складаються з решіток з наночастинок, періодично розташованих на підкладці, в складі якої є активна зона (квантовий шар). Частинки при цьому можуть бути як діелектричними, так і металевими - в останньому випадку подібні лазери називають «гібридними» або «плазмонів» [103-108]. В даний

час щомісяця з'являються нові публікації, присвячені експериментальної реалізації таких пристроїв, але їх дослідження ще далеко від завершення.

1.5 Теорема пойнтінга для відкритий резонатор з активними зонами

Дуже корисну інформацію про моди лазерів можна отримати з комплексної теореми Пойнтінга, відомої в оптиці як «оптична теорема», якщо її застосувати до полів мод як рішень ЛЗВЗ. З точки зору математики, вона випливає з векторної формули Гріна, застосованої до гармонійного за часом полю. Для комплексного k, вона має такий вигляд:

$$\Pi = -(1/2)\int_V (\vec{j}^{e*}\vec{E} + \vec{j}^{m}\vec{H}^{*})dV + (i/2)\int_V (k^{*}\varepsilon^{*}Z_0^{-1}|\vec{E}|^2 - k\mu Z_0|\vec{H}|^2)dV, \quad (1.5.1)$$

де $\Pi = (1/2)\oint_S \vec{E}\times\vec{H}^{*}ds$ - повний потік вектора Пойнтінга крізь довільну границю S, що обмежує область V, яка містить в собі всі розсіювачі і джерела, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ - імпеданс вільного простору, ε і μ - відносні діелектрична і магнітна проникності, $\vec{j}^{e}$ і $\vec{j}^{m}$ - задані сторонні електричні і магнітний струми, а знак * позначає комплексне сполучення.

Вираз (1.5.1) можна застосувати і для власної моди пасивного резонатора (в цьому випадку $\vec{j}^{e} = \vec{j}^{m} = 0$), яка має комплексну частоту k_s. Після відділення дійсної частини, отримуємо формулу, що має сенс «оптичної теореми» для власних мод,

$$-\frac{\mathrm{Re}\,k_s}{\mathrm{Im}\,k_s} = \frac{\mathrm{Re}\,k_s W_s}{\mathrm{Re}\,k_s W_{abs(s)} + P_{rad(s)}}, \quad (1.5.2)$$

де

$$W_s = (1/2)\int_{V_{\min}} (Z_0^{-1}\,\mathrm{Re}\,\varepsilon\,|\vec{E}_s|^2 + Z_0\,\mathrm{Re}\,\mu\,|\vec{H}_s|^2)dV, \quad (1.5.3)$$

$$W_{abs(s)} = (1/2)\int_{V_{\min}} (Z_0^{-1}\,\mathrm{Im}\,\varepsilon\,|\vec{E}_s|^2 + Z_0\,\mathrm{Im}\,\mu\,|\vec{H}_s|^2)dV\,, \qquad (1.5.4)$$

$$P_{rad(s)} = \mathrm{Re}\,\Pi_s = (1/2)\,\mathrm{Re}\oint_S \vec{E}\times\vec{H}^* ds\,, \qquad (1.5.5)$$

Тут введено такі величини: W_s і $W_{abs(s)}$ - середня за період енергія, запасені і поглинена в резонаторі, відповідно, і $P_{rad(s)}$ - усереднений потік вектора Пойнтінга для даної моди крізь мінімальну сферу, яка містить всі елементи резонатора - обсяг відкритого резонатора $V_{\min}$.

Зауважимо, що якщо (див. Розділи 2, 3) відкритий резонатор являє собою нескінченну грати ниток, нескінченних в напрямку осі Z і розташованих з періодом p уздовж осі X, то $V_{\min}$ - це прямокутник в площині XY з основою p уздовж осі X і такий висотою уздовж осі Y, щоб усередині нього знаходилися всі елементи решітки.

Будь-яку зі сторін (1.5.2) (і праву і ліву) можна позначити $2Q_s$ і використовувати для обчислення добротності Q_s цієї своєї моди. Тому Q-фактор є величиною, яка може приймати тільки дискретні значення. При цьому, якщо $V_{\min}$ в (1.5.3) розширити на весь простір, то права частина (1.5.2) зводиться до $-\mathrm{Re}\,k_s/\mathrm{Im}\,k_s$, або, іншими словами, (1.5.2) вироджується в тривіальне тотожність.

Розглянемо, слідуючи роботі [3], які наслідки має (1.5.1) для полів лазерних мод $\{\vec{E}_s, \vec{H}_s\}$. В цьому випадку зовнішніх джерел немає, $\vec{j}^e = \vec{j}^m = 0$, а частота моди матеріальна, $\mathrm{Im}\,k_s = 0$ $(k_s = \mathrm{Re}\,k_s)$. Будемо також припускати, що всі матеріали немагнітних, $\mu = 1$ і перейдемо до опису їх властивостей за допомогою показника заломлення. Таким чином, в активній зоні $\varepsilon_a = (\alpha_a - i\gamma_s)^2$, де α_a - відомий оптичний показник заломлення, а γ_s - невідомий показник посилення (для стислості, посилення моди; нагадаємо, що пара (k_s, γ_s) - це власне значення). Отриманий результат і є теоремою

Пойнтінга або «оптичної теоремою» для лазерів, відомої також під назвою принципу «total loss = total gain»,

$$\tilde{P}_{rad(s)} + \tilde{P}_{abs(s)} = k_s \tilde{W}_{gain(s)}, \tag{1.5.6}$$

$$\tilde{W}_{gain(s)} = Z_0^{-1} \gamma_s \alpha_a \int_{V_a} |\vec{E}_s(\vec{R}, k_s, \gamma_s)|^2 dV, \tag{1.5.7}$$

де $\tilde{P}_{abs(s)} = k_s \tilde{W}_{abs(s)}$ (див. (1.5.4), а індекс ~ використаний, щоб підкреслити, що відповідні величини побудовані на вирішенні ЛЗВЗ і таким чином залежать від γ.

Ліва частина (1.5.6) має розмірність площі, тому з точністю до константи її можна назвати поперечником випромінювання. В такому ж сенсі права частина (1.5.6) - діаметр посилення, яке виникає завдяки енергії, що генерується в активній зоні V_a. Таким чином, для моди з номером s і хвильовим числом k_s, повні втрати (на випромінювання і в матеріалі) точно збалансовані з «антіпотерямі» за умови, що посилення в активній зоні дорівнює γ_s.

Підкреслимо, що принцип «total loss = total gain» раніше застосовувався в «Напівкласична теорії лазерів», заснованої на одновимірної моделі (резонатор Фабрі-Перо) і ГО аналізі мод.

Слід зазначити, що крім дійсної частини, вираз (1.5.1) має також уявну частину, яка має такий вигляд,

$$2\,\mathrm{Im}\,\Pi_s = k_s \int_V [Z_0^{-1}\,\mathrm{Re}(\nu^2)\,|E_s|^2 - Z_0\,|\vec{H}_s|^2] dV, \tag{1.5.8}$$

де область V довільна. Якщо прийняти, що V переходить в усі простір, наприклад, за рахунок того, що $S \to \infty$ як куля великого радіусу, то ліва

частина (1.5.8) звертається в нуль завдяки умові випромінювання Зоммерфельда (1.4.1), оскільки з нього випливає, що

$$\Pi = \frac{1}{2Z_0 k^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [|\Phi^{(1)}(\theta,\varphi)|^2 + |\Phi^{(2)}(\theta,\varphi)|^2] \cos\theta d\theta d\varphi, \qquad (1.5.9)$$

Те ж саме є вірним, якщо $V = V_{\min}$. Таким чином, можна отримати,

$$\int_{V_{\min}} [Z_0^{-1} \mathrm{Re}(\nu^2) |\vec{E}_s|^2 - Z_0 |\vec{H}_s|^2] dv = 0, \qquad (1.5.10)$$

Це означає, що частини енергії кожної моди, пов'язані з електричним і магнітним полем і зосереджені всередині обсягу відкритого резонатора $V_{\min}$, завжди дорівнюють один одному. Те ж саме вірно для всього простору. Слід ще підкреслити, що цей факт має місце як для пасивних так і активних відкритих резонаторів.

Відкритий резонатор може бути повністю активним - в цьому випадку $\tilde{P}_{abs(s)} = 0$ і $V_{\min} = V_a$. Зауважимо, що такими можуть бути тільки найпростіші конфігурації: одновимірний плоский діелектричний шар (еталон Фабрі-Перо, Розділ 2), двовимірний кругової резонатор і тривимірний сферичний резонатор.

Лазерні резонатори, у яких активна зона не збігається цілком з усім резонатором $V_p \neq 0$ (див. Рис. 1.3), зустрічаються більш часто. Наприклад, це має місце, якщо для оптичного накачування резонатора використовується сфокусований промінь іншого лазера. Крім цього, комбінація окремих пасивних і активних областей всередині $V_{\min}$ є типовою для періодичних резонаторів у вигляді решіток з ниток або стрічок, розташованих усередині шаруватого середовища.

Теорема Пойнтінга дозволяє зв'язати пороги самозбудження власних мод у резонаторів з частковою активною зоною з їх добротності. При цьому

для будь-якої моди з індексом *s,* необхідно ввести коефіцієнт перекриття електричного поля моди з активною зоною, $\Gamma_s^{(a)} \le 1$, а саме

$$\Gamma_s^{(a)} = \tilde{W}_s^{(a)} / \tilde{W}_s \tag{1.5.15}$$

$$\tilde{W}_s^{(a)}(k_s, \gamma_s) = (1/2Z_0)(\alpha_a^2 - \gamma_s^2)\int_{V_a} |\vec{E}_s(\vec{R}, k_s, \gamma_s)|^2 dv \tag{1.5.11}$$

$$\tilde{W}_s(k_s, \gamma_s) = (1/2Z_0)\int_{V_{\min}} (\alpha^2 - \gamma_s^2)|\vec{E}_s(\vec{R}, k_s, \gamma_s)|^2 dv, \tag{1.5.12}$$

де $\alpha = \alpha_{a,d}$ в $V_{a,d}$ і 1 в V_f, а також $V_{\min} = V_a + V_d + V_f$.

Це дозволяє переписати теорему Пойнтінга для лазерів (1.5.6) у такий спосіб:

$$\gamma_s = \frac{\alpha_a}{\Gamma_s^{(a)}(k_s, \gamma_s)} \frac{1}{\tilde{Q}_s(k_s, \gamma_s)}, \tag{1.5.13}$$

де $\tilde{Q}_s = k_s \tilde{W}_s / \tilde{P}_s$ - добротність резонатора з активною зоною.

У тому випадку, якщо поріг самозбудження малий, $\gamma_s \ll 1$, то формула (1.5.13) дозволяє замінити добротність активного резонатора на добротність пасивного резонатора (тобто при $\gamma_s = 0$),

$$\gamma_s = \frac{\alpha_s}{\Gamma_s^{(a)}(k_s, 0) Q_s} + O(\gamma_s^2) \tag{1.5.14}$$

Головний висновок, який випливає з (1.5.14), полягає в тому, що для отримання низького порога самозбудження при накачуванні активної зони недостатньо мати високий Q-фактор цієї ж моди в цьому ж резонаторі без накачування. Додатково необхідно мати близьке до 1 значення коефіцієнта

перекриття для даної моди, тобто активна зона повинна розташовуватися в максимумах стоячій хвилі її електричного поля.

РОЗДІЛ 2

ЧАСТОТИ І ПОРОГИ МОД ПЛОСКОГО БАГАТОШАРОВОГО РЕЗОНАТОРА

В цьому розділі побудована точна модель для опису, в одновимірному приближенні, мод мікрорезонаторного лазера типу VCSEL і представлені результати чисельного моделювання. Знайдено закономірності істотного зниження порога самозбудження. Додатково детально досліджується відбивні властивості розподіленого бреггівського відбивача.

Епітаксійних вирощені плоскошарові напівпровідникові мікрорезонатори з вбудованими в них активними шарами (так звані «квантові колодязі» і чи випадкових «квантових точок»), широко використовуються в сучасній фотоніці. Область їх застосування охоплює як фундаментальні питання, такі як модифікація характеристик спонтанного випромінювання в різних системах і візуалізація квантових ефектів, так і прикладні теми, такі як звуження смуги частот і поліпшення спрямованості випромінювання світлодіодів («laser-emitting diode», LED), а також розробка лазерів поверхневого випромінювання з вертикальним резонатором («vertical cavity surface emitting laser», VCSEL) [103-107] і лазерів на фотонних кристалах [112].

У резонаторі типу VCSEL, оптичне поле високої інтенсивності зазвичай укладено між верхнім і нижнім розподіленими відбивачами Брегга («distributed Bragg reflectors», DBR), складеними з періодично згрупованих пар чверть-хвильових діелектричних шарів. Довжина хвилі випромінювання VCSEL визначається оптичними властивостями відбивачів та мікрорезонатора. На відміну від цього, граничне значення струму інжекції при випусканні світла чутливо до положення і формі електродів, з яких в резонатор вприскуються носії заряду. Розуміння взаємозв'язку між становищем і товщиною активного шару і структурою поля власної моди резонатора дуже важливо для досягнення низьких порогів. Однак до сих пір аналізу залежності порогів мод від геометрії резонатора та DBR приділялося недостатньо уваги.

В даному розділі ми викладемо результати дослідження спектрів випромінювання і відповідних їм порогів самозбудження для мод в одновимірної моделі плоскошарового мікрорезонатору типу VCSEL, що містить активний («квантовий») шар. В якості допоміжної задачі ми розглянемо задачу на лазерні власні значення для діелектричного шару з активною зоною і розсіювання плоскої хвилі на відбивачі Брегга.

2.1 Діелектричний слой з активної зоною

Основною частиною лазеру типу VCSEL є плоский діелектричний шар-мікрорезонатор з активною зоною, яка також має вигляд плоского шару. Ширина такої структури становить сотні і навіть тисячі довжин хвиль, що дозволяє моделювати її як нескінченну.

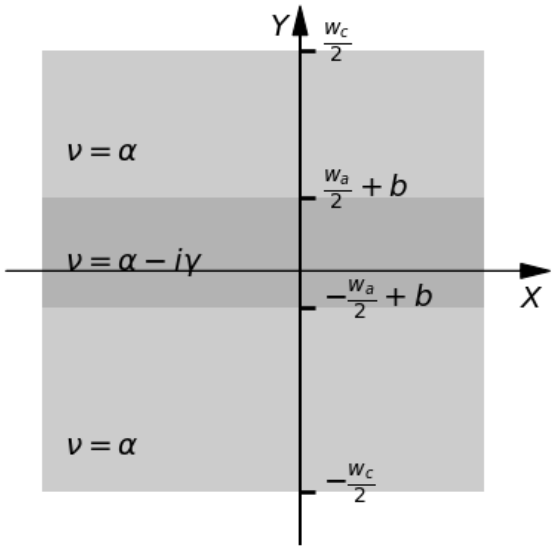


Рис. 2.1. Поперечний переріз діелектричного резонатора з активним шаром

Тому в даному підрозділі досліджується власні стани електромагнітного поля в нескінченному діелектричному шарі товщиною w_c з коефіцієнтом заломлення α_c, розташованому в вільному просторі, коефіцієнт заломлення якого дорівнює 1. У літературі подібний плоский діелектричний резонатор нерідко носить назву «еталона Фабрі-Перо». Будемо припускати, що всередині шару-резонатора знаходиться активна зона товщини w_a з коефіцієнтом заломлення $\alpha_a - i\gamma$ $(\gamma > 0)$, зрушений від середини резонатора на відстань b.

Якщо припустити, що електромагнітне поле не змінюється уздовж осей X і Z, то воно може бути виражено функцією U, яка дорівнює одній з компонент поля E_z або H_z. Поза межами розділу середовищ ця функція повинна задовольняти рівнянню Гельмгольца з коефіцієнтом ν^2, де

ступінчаста функція $\nu(y)$ покладається рівною 1 поза шару, тобто у верхній і нижній півплощині, а всередині шару дорівнює відповідному коефіцієнту заломлення. Тангенціальні компоненти поля повинні бути безперервними на кордонах середовищ і задовольняти умові випромінювання на нескінченності (при $|y| \to \infty$).

При дослідженні лазерної завдання необхідно знайти дискретну безліч пар дійсних чисел, (κ_n, γ_n). Перше з них - це нормований частота випромінювання, $\kappa = kw_c$, а друге - відповідний матеріальний поріг самозбудження.

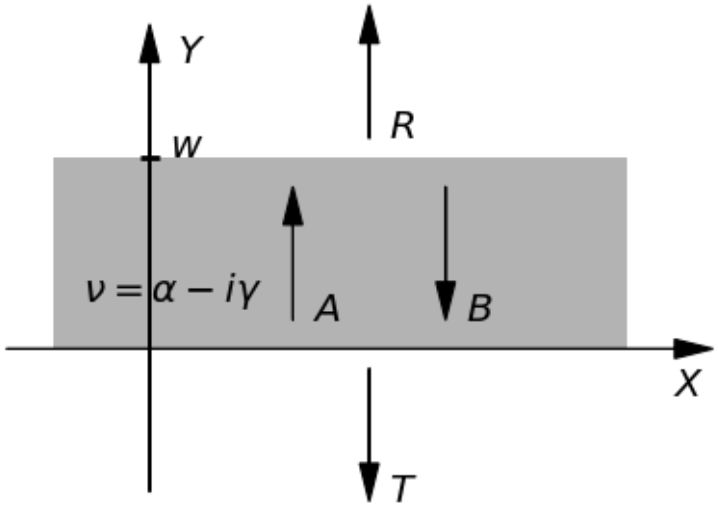


Рис.2.2 Поперечний переріз діелектричного активного шара

Спочатку розглянемо активний шар у вільному просторі шириною w та з показником заломлення $\nu = \alpha\text{-i}\gamma$. У такій структурі існує чотири хвилі, у верхньому та нижньому півпросторі, $R\mathrm{e}^{iky}$ та $T\mathrm{e}^{-iky}$, відповідно, та всередині шару, $A\mathrm{e}^{i\nu ky}$ та $B\mathrm{e}^{-i\nu ky}$. Відповідно до граничних (1.1.2-1.1.5) вони амплітуди хвиль можна знайти з наступної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} R\mathrm{e}^{ikw} = A\mathrm{e}^{i\nu kw} + B\mathrm{e}^{-i\nu kw} \\ R\mathrm{e}^{ikw} = \nu A\mathrm{e}^{i\nu kw} - \nu B\mathrm{e}^{-i\nu kw} \\ T = A + B \\ -T = \nu A - \nu B \end{cases}. \qquad (2.1.1)$$

Рішення цієї системи веде до наступного характеристичного рівняння

$$e^{-i2\kappa(\alpha-i\gamma)w} = R_1 R_2, \quad R_{1,2} = \frac{\nu-1}{\nu+1}. \tag{2.1.2}$$

У даному рівнянні $R_{1,2}$ є коефіцієнти відбуття від внутрішніх границь шару. З метою отримання характеристичного для системи зображеної на Рис. 2.1 замість коефіцієнтів $R_{1,2}$ підставимо коефіцієнти відбиття хвилі, що падає з активного шару ($\nu = \alpha$-iγ), від діелектричного шару шириною w з показником заломлення α; за цим шаром знаходиться вільний простір див. Рис. 2.2. Для цього треба вирішити схожу до (2.1.1) систему лінійних рівнянь відносно R за умови наявності падаючого поля:

$$\begin{cases} R\mathrm{e}^{ikw} = A\mathrm{e}^{i\alpha kw} + B\mathrm{e}^{-i\alpha kw} + e^{-ik\nu y} \\ R\mathrm{e}^{ikw} = \alpha A\mathrm{e}^{i\alpha kw} - \alpha B\mathrm{e}^{-i\alpha kw} - \nu e^{-ik\nu y} \\ T = A + B \\ -T = \nu A - \nu B \end{cases}, \tag{2.1.3}$$

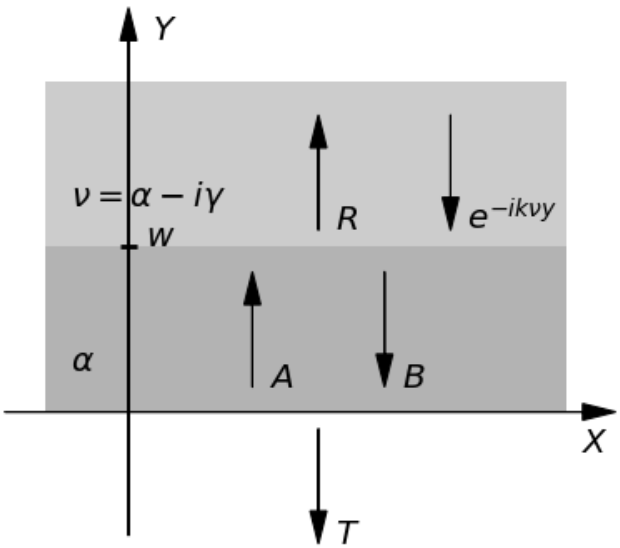


Рис.2.3 Поперечний переріз багатошаруватої структури

Її рішення є

$$R_{1,2} = \frac{R_e e^{i\kappa\alpha w} + R_a}{1 + e^{i\kappa\alpha w} R_e R_a}, \quad R_a = \frac{i\gamma}{2\alpha - i\gamma}, \quad R_e = \frac{1-\alpha_c}{1+\alpha_c} \qquad (2.1.4)$$

Використовуючи (2.1.2) та (2.1.4) можна виписати характеристичне рівняння для трьохшарової структури зображеної на Рис.2.1, де у шарі шириною w_c з показником заломлення α, знаходиться активний шар шириною w_a з показником заломлення зрушений на довільну відстань b від його центру,

$$e^{-i2\kappa(\alpha_c - i\gamma)(w_a/w_c)} = R_1 R_2 \ , \qquad (2.1.5)$$

$$R_{1,2} = \frac{R e^{i\kappa\alpha_c[1\pm(2b\mp w_a)/w_c]} + R_a}{1 + e^{i\kappa\alpha_c[1\pm(2b\mp w_a)/w_c]} R R_a}, \quad R_a = \frac{i\gamma}{2\alpha - i\gamma}, \quad R = \frac{1-\alpha_c}{1+\alpha_c} \qquad (2.1.6)$$

де R коефіцієнти Френеля для відображення від нижньої і верхньої межи мікрорезонатора, а R_a - такі ж величини для активного шару

Якщо в резонаторі активний шар розташований симетрично (b=0), то $R_1 = R_2 = R$ та равняння (2.1.1) розпадається на два незалежних рівняння для симетричних та антисиметричних мод, відповідно,

$$e^{-i\kappa(\alpha_c - i\gamma)(w_a/w_c)} \pm R = 0, \quad R = \frac{R e^{i\kappa\alpha_c(1-w_a/w_c)} + R_a}{1 + e^{i\kappa\alpha_c(1-w_a/w_c)} R R_a}, \qquad (2.1.3)$$

На Рис. 2.2 представлені результати розрахунків коренів даних рівнянь для симетричних мод, а на Рис. 2.3 - для антисиметричних. На цих графіках показані власні значення у залежності від ставлення товщини активной зони до товщини всього відкритого резонатора. Видно, що пороги ростуть при звуженні активної зони, а довжини хвиль лазерних мод майже не змінюються. Осциляції, які можна спостерігати на цих графіках,

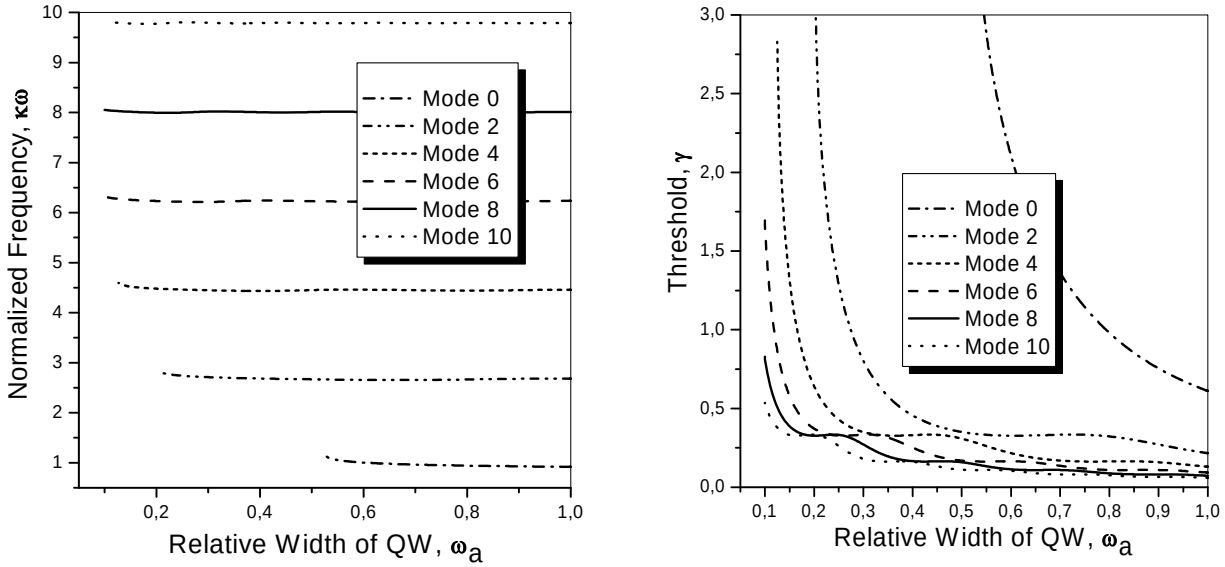
відповідають кращему або гіршему перекриттю між активним шаром і E_n модою електромагнітного поля (див. Підрозділ 2.5).

Якщо активна зона розташована точно в середині резонатора, що робить структуру симетричною, то можна вивести асимптотичні наближення для власних значень, які залежать від відносної товщини активної зони w_a / w_c і коефіцієнта заломлення α_c,

$$\kappa_n = \pi(n+1)/\alpha_c \tag{2.1.4}$$

$$\gamma_n = [\kappa_n (w_a / w_c)]^{-1} \ln[(\alpha_c + 1)/(\alpha_c - 1)], \tag{2.1.5}$$

де $n = 0,1,2,...$ Ці асимптотические формули підтверджуються графіками на Рис. 2.2 і 2.3. Дійсно, якщо активний шар займає 1/10 обсягу відкритого резонатора, то поріг випромінювання приблизно в 10 разів вище ніж для відкритого резонатора, повністю заповненого активним матеріалом.

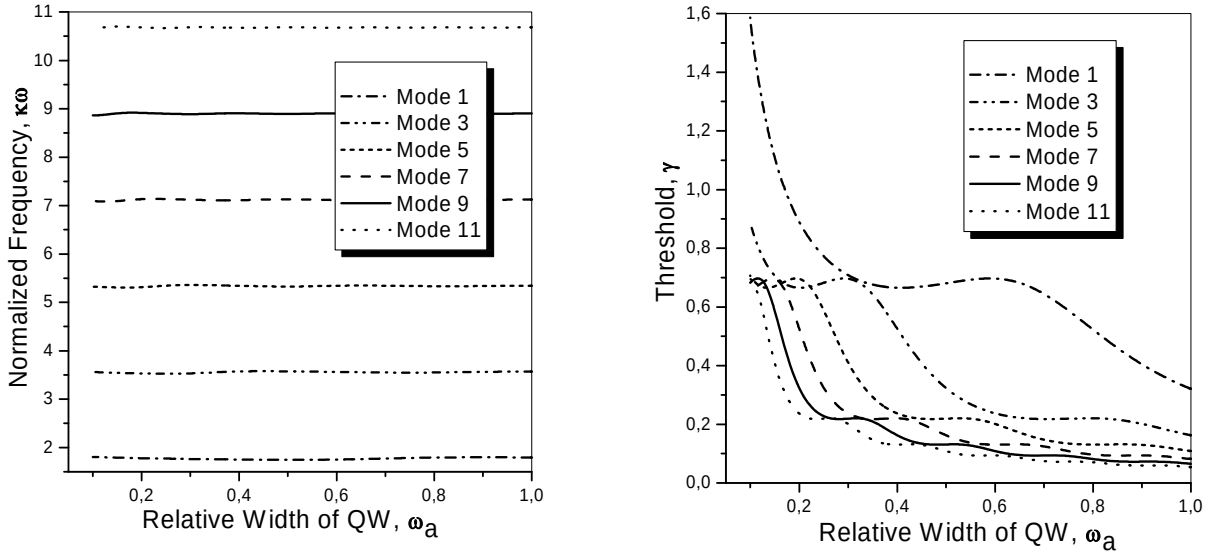


(а) (б)

Рис. 2.2. Залежності частот (а) и порогів самовпримінювання (б) симетричных мод від відносної ширини активного шару у відкритому резонаторі GaAs у вільному просторі. Коефіцієнт заломлення діелектрика дорівнює 3.53.

Тепер зафіксуємо ширину активної зони дорівнює одній десятій товщини шару ($w_a = 0.1 w_c$) у тому ж найпростішому варіанті резонатора, але будемо варіювати її розташування, змінюючи величину зсуву *b*. Такі залежності представлені на Рис. 2.4 і 2.5 для мод $n = 10, 11, 12, 13$.

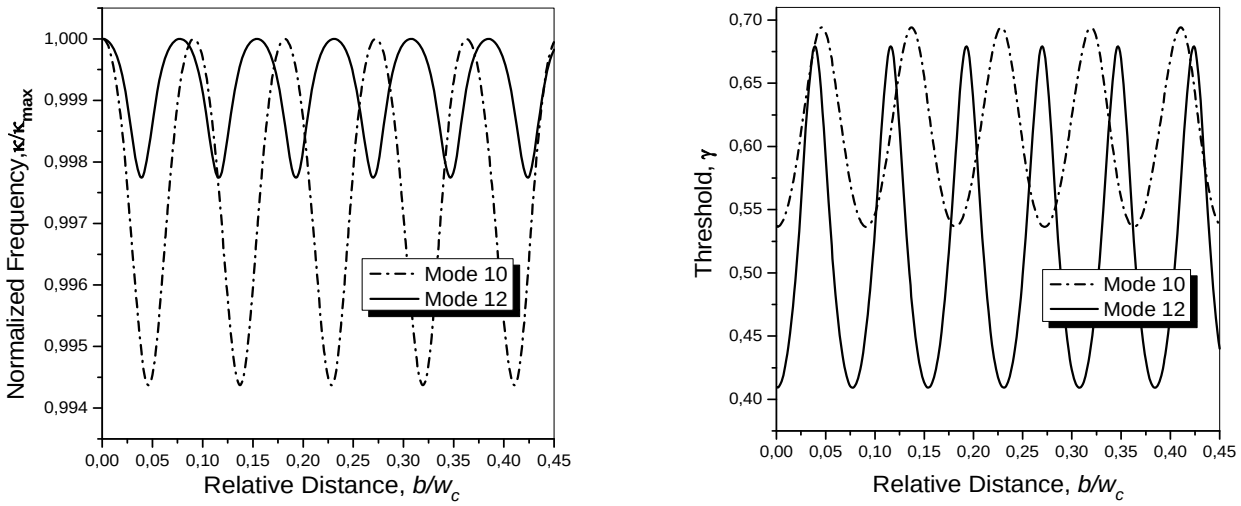
Як видно на Рис. 2.4 (а) і 2.5 (а), пороги мод мають максимуми і мінімуми, які відповідає ступеню перекриття активної зони і E -компоненти електромагнітного поля даної моди. Власні частоти змінюються схожим чином, але їх варіації лежать в межах 1% щодо середніх значень - див. Рис. 2.4 (б) і 2.5 (б).



(а) (б)

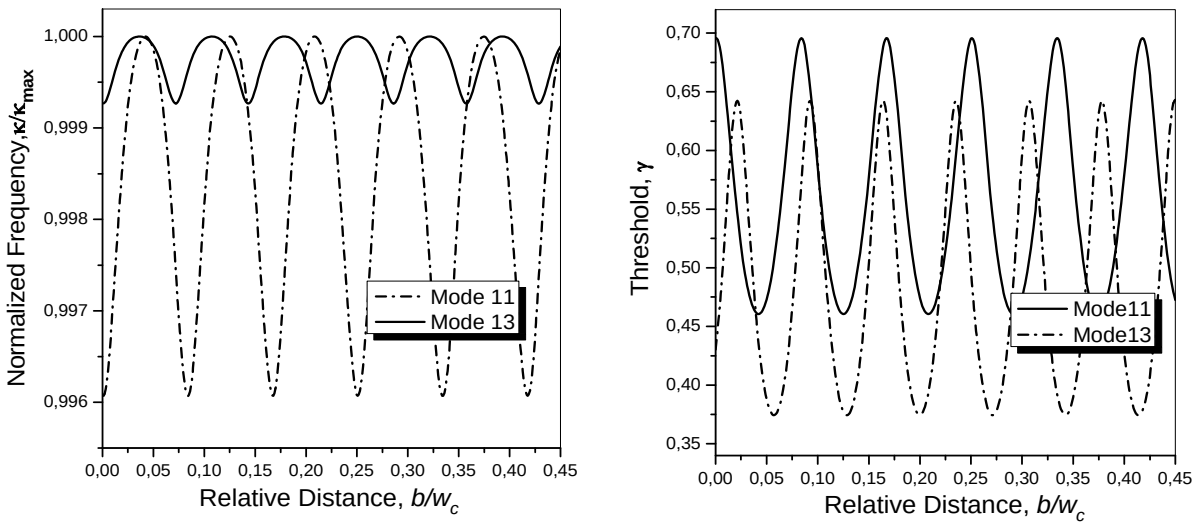
Рис. 2.3. Те ж саме, що на Рис. 2.4, але для антисиметричних мод.

Слід зазначити, що на Рис 2.4, де представлені парні моди, для яких максимум *E*-поля знаходиться при $y = 0, b = 0$ (Рис. 2.1), розташування активної зони в центрі резонатора дає мінімум порога самозбудження. Для антисиметричних мод таке розташування призводить до максимуму порога. Таким чином, ступінь перекриття активної зони і *E*-поля моди добре пояснює динаміку лазерних власних значень (див. Також підрозділ 2.5).



(а) (б)

Рис.2.4. Залежності частот (а) та порогів (б) симетричних мод від відносної відстані між активною зоною і верхньою межою резонатора. Частоти нормовані на їх максимальні значення, $\kappa_{10} = 9.82239$ та $\kappa_{12} = 11.59021$.



(а) (б)

Рис.2.5 Те ж, що на Рис. 2.4, але для антисиметричних мод. Частоти нормовані на їх максимальні значення, $\kappa_{11} = 10.70576$ та $\kappa_{13} = 12.47541$.

2.2 Метод матриць переходу для багатошарових структур

Розглянемо допоміжну задачу проходження і відображенняплоскої хвилі, нормально падаючої на довільну багатошарову діелектричну структуру, як показано на Рис 2.6.

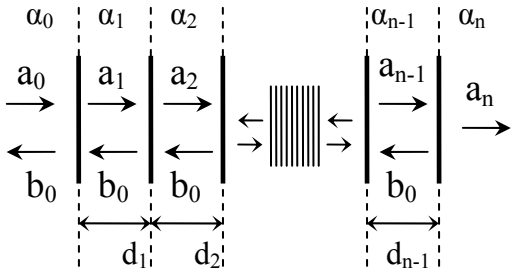


Рис. 2.6. Багатошарувата структура та амплитуди плоскої хвилі

Метод матриць переходу є класичним і давно використовується (Див. [113]), хоча деякі нові деталі можуть бути знайдені в [114, 115]. Матриця переходу $\tau(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ комплексних амплітуд плоскої хвилі, що падає на розділ середовищ двох діелектриків ε_0 та ε_1 може бути введена в розгляд наступним чином:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \tau(\alpha_0, \alpha_1) \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

Загальне представлення для матриці переходу має наступнийвигляд:

$$\tau(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \alpha_i / \alpha_{i+1} & 1 - \alpha_i / \alpha_{i+1} \\ 1 - \alpha_i / \alpha_{i+1} & 1 + \alpha_i / \alpha_{i+1} \end{pmatrix}. \tag{2.2.1}$$

Матриці переходу мають наступні властивості:

$$\tau(\alpha, \alpha') = \tau(\alpha, \alpha'') \cdot \tau(\alpha'', \alpha') \tag{2.2.2}$$

$$\tau(\alpha, \alpha')^{-1} = \tau(\alpha', \alpha) \tag{2.2.3}$$

$$\tau(\alpha, \alpha')^{T} = \tau(\alpha, \alpha') \tag{2.2.4}$$

$$\det \tau(\alpha, \alpha') = 1 \tag{2.2.5}$$

Матриця зсуву усередині однорідного діелектричного шару має наступний вигляд

$$\Delta(\alpha d \kappa) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha d \kappa} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha d \kappa} \end{pmatrix}, \tag{2.3.6}$$

Матриці зсуву мають наступні властивості:

$$\Delta(\alpha(d_1+d_2)\kappa)=\Delta(\alpha d_1\kappa)\cdot\Delta(\alpha d_2\kappa) \tag{2.3.7}$$

$$\Delta(x)^{-1}=\Delta(-x) \tag{2.2.8}$$

$$\det\Delta(x)=1\,. \tag{2.2.9}$$

Тоді матриця переходу для структури, що складається з N шарів з діелектрика товщиною d_i і з коефіцієнтом заломлення α_i, може бути представлена як добуток матриць $\tau(\alpha_{i-1},\alpha_i)$ і $\Delta(\alpha_i d_i\kappa)$, або

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\tau(\alpha_0,\alpha_1)\cdot\prod_{i=1}^{N-1}\Delta(\alpha_i d_i\kappa)\cdot\tau(\alpha_i,\alpha_{i+1}) \tag{2.2.10}$$

Згідно властивостями матриць перехід і зрушень загальна матриця має такі властивості:

$$P^T=P \tag{2.2.11}$$

$$\det(P)=1 \tag{2.2.12}$$

Допустимо, що ми маємо падаючу хвилю з амплітудою a_0, хвиля що відбилася має амплітуду b_0, хвиля що пройшла має амплітуду a_n, тоді можна побудувати зв'язати ці амплітуди через матрицю переходу

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} a_n \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.13}$$

Для знаходження коефіцієнта відображення необхідно знайти відношення комплексної амплітуди хвилі що минає (відображеної) b_0 до амплітуди хвилі що прийшла (падаючої) a_0 у, припустимо, верхній

півплощині. Аналогічним чином, коефіцієнт проходження знаходиться як відношення амплітуд хвиль що пройшла a_n падаючій a_0,

$$R = b_0 / a_0 = p_{21} / p_{11} \tag{2.2.14}$$

$$T = a_n / a_0 = 1 / p_{11}. \tag{2.2.15}$$

Слід зауважити, що в структурі без втрат виконується закон збереження енергії: $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

2.3 Рефлектор Брегга та його властивості

Розподілений рефлектор Брегга (DBR) складається з набору шарів з коефіцієнтами заломлення, що поперемінно змінюються. Кожен шар обумовлює часткове відображення падаючої хвилі. Взаємодія цих ефектів формує високий рівень відображення. Область частот, на яких рефлектор має високий (близький до1) коефіцієнт відображення називається смугою відбиття або смугою замикання. У цій смузі світло не може пройти крізь відбивач. Ця властивість відбивача Брегга широко використовується - наприклад, в резонаторах типу VCSEL. Для побудови математичної моделі відбивача покладемо, що про він складається з N пар шарів діелектриків з коефіцієнтами заломлення α_1, α_2 і товщинами d_1, d_2, відповідно; уся багатошарова структура знаходяться між двох напівпросторів з коефіцієнтами заломлення α_0, α_N. Цей набір параметрів повністю описує одномірне розсіювання хвиль на розподіленому відбивачі Брегга.

Використовуючи метод, викладений у підрозділі 2.3, можна побудовати матрицю переходу для всієї структури наступним способом:

$$S = \tau(\alpha_0, \alpha_2) \cdot L^N \tau(\alpha_2, \alpha_N), \tag{2.3.1}$$

де

$$L = \tau(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Delta(\alpha_1 d_1 \kappa) \cdot \tau(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Delta(\alpha_2 d_2 \kappa) \tag{2.3.2}$$

З урахуванням вищезазначених властивостей (2.3.12), $\det S = 1$ та

$$L = \frac{1}{4a}\begin{pmatrix} (1+a)^2 e^{-x-y} - (1-a)^2 e^{x-y} & (a^2-1)e^{y}(e^{-x}-e^{x}) \\ (a^2-1)e^{-y}(e^{x}-e^{-x}) & (1+a)^2 e^{x+y} - (1-a)^2 e^{-x+y} \end{pmatrix} \qquad (2.3.3)$$

де $a = \alpha_1/\alpha_2$, $x = i\alpha_1 d_1 \kappa$, і $y = i\alpha_2 d_2 \kappa$. У випадку коли товщини шарів d_1 і d_2 дорівнюють чверті довжини хвилі, чи $x = y = i\pi/2$, то матрица L приймає спрощений вид,

$$L = \frac{1}{2a}\begin{pmatrix} -1-a^2 & a^2-1 \\ a^2-1 & -1-a^2 \end{pmatrix}, \qquad (2.3.4)$$

а її характеристичне рівняння приймає наступний вид

$$\lambda^2 + \frac{1+a^2}{a}\lambda + 1 = 0, \qquad (2.3.5)$$

яке має два завжди відмінних один від одного власних значення х відповідними векторами,

$$\lambda_1 = -\frac{1}{a}, \qquad e_1 = (-1,1), \qquad (2.3.6\ а)$$

$$\lambda_2 = -a, \qquad e_2 = (1,1). \qquad (2.3.6\ б)$$

Тому діагональована матриця має наступний вид:

$$L = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.3.7)$$

Зведення матриці L у степінь N дає наступний результат:

$$L^N = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^N / a^N & 0 \\ 0 & (-a)^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3.8}$$

$$L^N = \frac{(-1)^N}{2} \begin{pmatrix} a^N + a^{-N} & a^N - a^{-N} \\ a^N - a^{-N} & a^N + a^{-N} \end{pmatrix} \tag{2.3.9}$$

Повертаючись до (2.4.1), можна прийти к загальному виду матрицы S,

$$S = \frac{(-1)^N}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^N + \frac{\alpha_0}{\alpha_N}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^N & \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^N - \frac{\alpha_0}{\alpha_N}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^N \\ \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^N - \frac{\alpha_0}{\alpha_N}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^N & \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^N + \frac{\alpha_0}{\alpha_N}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^N \end{pmatrix} \tag{2.3.10}$$

У граничному випадку $N = 0$ матриця S вироджується у матрицю переходу для границі розділу двох діелектриків з коефіцієнтами заломлення α_0 и α_N. У відповідності з (2.2.14-15), можна знайти коефіцієнт відбиття та проходження, які дорівнюють

$$R = \frac{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^N - \frac{\alpha_0}{\alpha_N}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^N}{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^N + \frac{\alpha_0}{\alpha_N}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^N} \tag{2.3.11}$$

$$T = \frac{(-1)^N 2}{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^N + \frac{\alpha_0}{\alpha_N}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^N}. \tag{2.3.12}$$

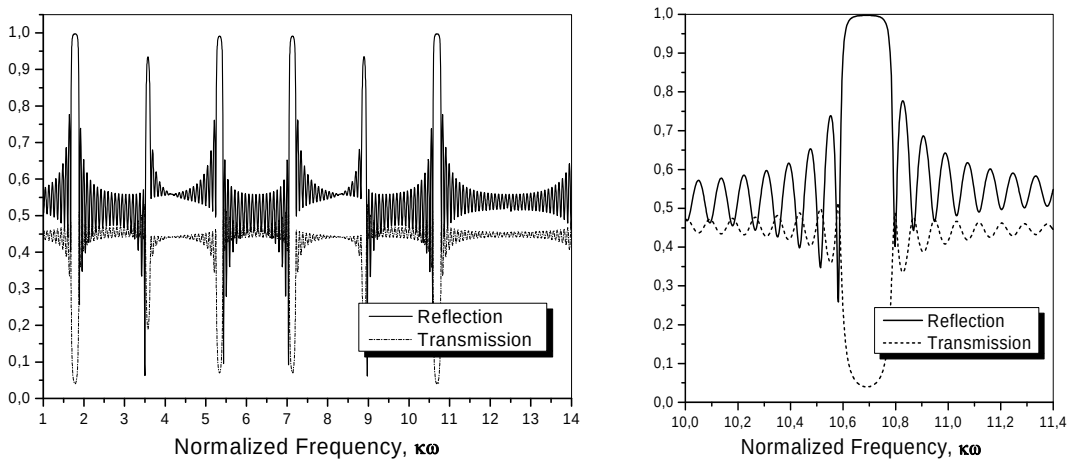


Рис. 2.6 Коефіцієнт відбиття рефлектора Брега, що будується з 20 пар GaAs и $Ga_{0.8}Al_{0.2}As$ (співвідношення $w_H / w_L = 1.16$) у залежності від нормованої частоти (а). Той самий графік у іншому масштабі (б).

Для ілюстрації візьмемо рефлектор Брегга у вільному просторі, що складається з пар діелектриків GaAs и $Ga_{0.8}Al_{0.2}As$ з коефіцієнтами заломлення $\alpha_H = 3.53$ і $\alpha_L = 3.08$, відповідно.

Коефіцієнт відбиття для такого рефлектора показаний на Рис. 2.6 як функція нормованої частоти $\kappa = kw_c$ і демонструє наявність смуг запирання.

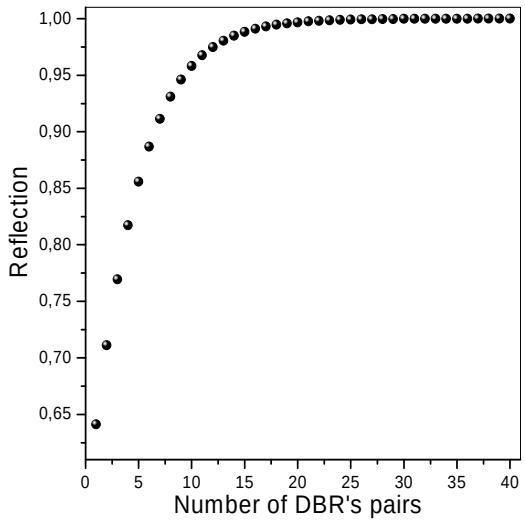


Рис 2.7. Залежність коефіцієнта відбиття від кількості пар шарів в розподіленому бреггівськими рефлекторі, геометричні та матеріальні параметри якого відповідають Рис. 2.6 на частоті $\kappa = 10.67$.

Слід зазначити, що якщо частота знаходиться в смуз і запирання, то коефіцієнт відбиття від розподіленого відбивача Брегга наближається до одиниці експоненціальне при збільшенні кількості пар шарів *N*. Це демонструється на Рис. 2.7, де дискретні значення коефіцієнта відображення в залежності від числа *N,* зростаючого від 1 до 40. При цьому всі матеріальні та геометричні параметри - такі, ж, як і для Рис. 2.6, а нормована частота $\kappa = 10.67$. Наприклад, якщо відбивач має 40 пар шарів, то на зазначеній частоті коефіцієнт відбиття дорівнює 0.99998.

2.4 Резонатор типу VCSEL

Тепер розглянемо відкритий резонатор у вигляді плоского діелектричного шару з GaAs з активною зоною в центрі нього, з гори та низу два відбивача Брегга оточують його - див. Рис.2.8.

Для находження частот та порогів мод випроміннювання цього резонатору потрібно модифікувати рівняння (2.1.1) и (2.1.2). Тепер вони мають наступний вид:

$$e^{-i2\kappa(\alpha_c - i\gamma)(w_a/w_c)} = R_1 R_2, \qquad (2.4.1)$$

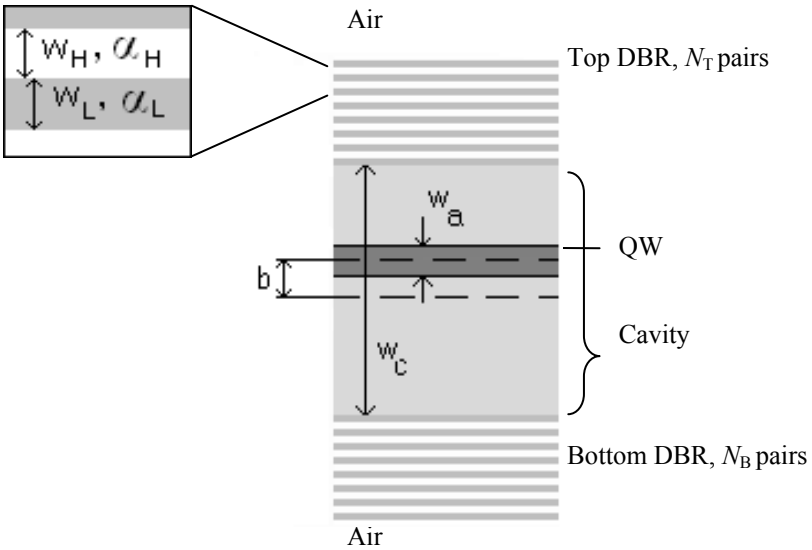


Рис 2.8. Поперечний переріз одновимірної моделі резонатора типа VCSEL з двома розподіленими рефлекторами Брегга.

$$R_{1,2} = \frac{R_{DBR} e^{i\kappa\alpha_c[1\pm(2b\mp w_a)/w_c]} + R_a}{1 + e^{i\kappa\alpha_c[1\pm(2b\mp w_a)/w_c]} R_{DBR} R_a}, \quad R_a = \frac{i\gamma}{2\alpha - i\gamma}, \tag{2.4.2}$$

де R_{DBR} - коефіцієнти відбиття від верхнього і нижнього рефлектора Брегга, отримані завдяки (2.3.4). Характеристичне рівняння для лазерних власних значень можна також побудувати, використовував методом матриць переходу для усієї структури зразка (2.3.10) поклавши у отриманої матриці ()

$$p_{1,1} = 0. \tag{2.4.3}$$

Будь-яке рівняння з (2.4.1) та (2.4.2) можна використовувати для розрахунку власної задачі на лазерні значення. Для цього є тотожними, проте побудованє більш загальним методом. Маючи необхідне рівняння Имея необходимое уравнение, можно взять начальные приближения для частоты и порога моды из асимптотик (2.2.4) и (2.2.5) и, используя двухпараметрический метод Ньютона [10], найти его корни (κ, γ), поэтапно прибавляя количество пар в отражателях Брэгга.

Побудуємо відбивач Брегга з двох діелектриків: арсеніду галію GaAs, який використовувався для побудови ядра резонатора, де знаходиться активна зона ($\alpha_H = 3.53$), і легованого арсеніду галію $Ga_{0.8}Al_{0.2}As$ з коефіцієнтом заломлення $\alpha_L = 3.08$. Коефіцієнт заломлення активного шару покладемо рівним $\nu = \alpha_H - i\gamma$, де γ - це поріг як елемент власної пари чисел.

У подальших обчисленнях будемо припускати, що товщина активної зони становить 1/10 від товщини ядра резонатора, $w_a = 0.1 w_c$. Розрахунки показують, що ті моди, чиї власні частоти потрапляють в смугу замикання розподіленого відбивача Брегга, відчувають значне зниження порога випромінювання. Так відбувається, наприклад, для моди з номером n = 11, чия нормована частота κ_{11} потрапляє в смугу замикання, показану на Рис. 2.6 (б).

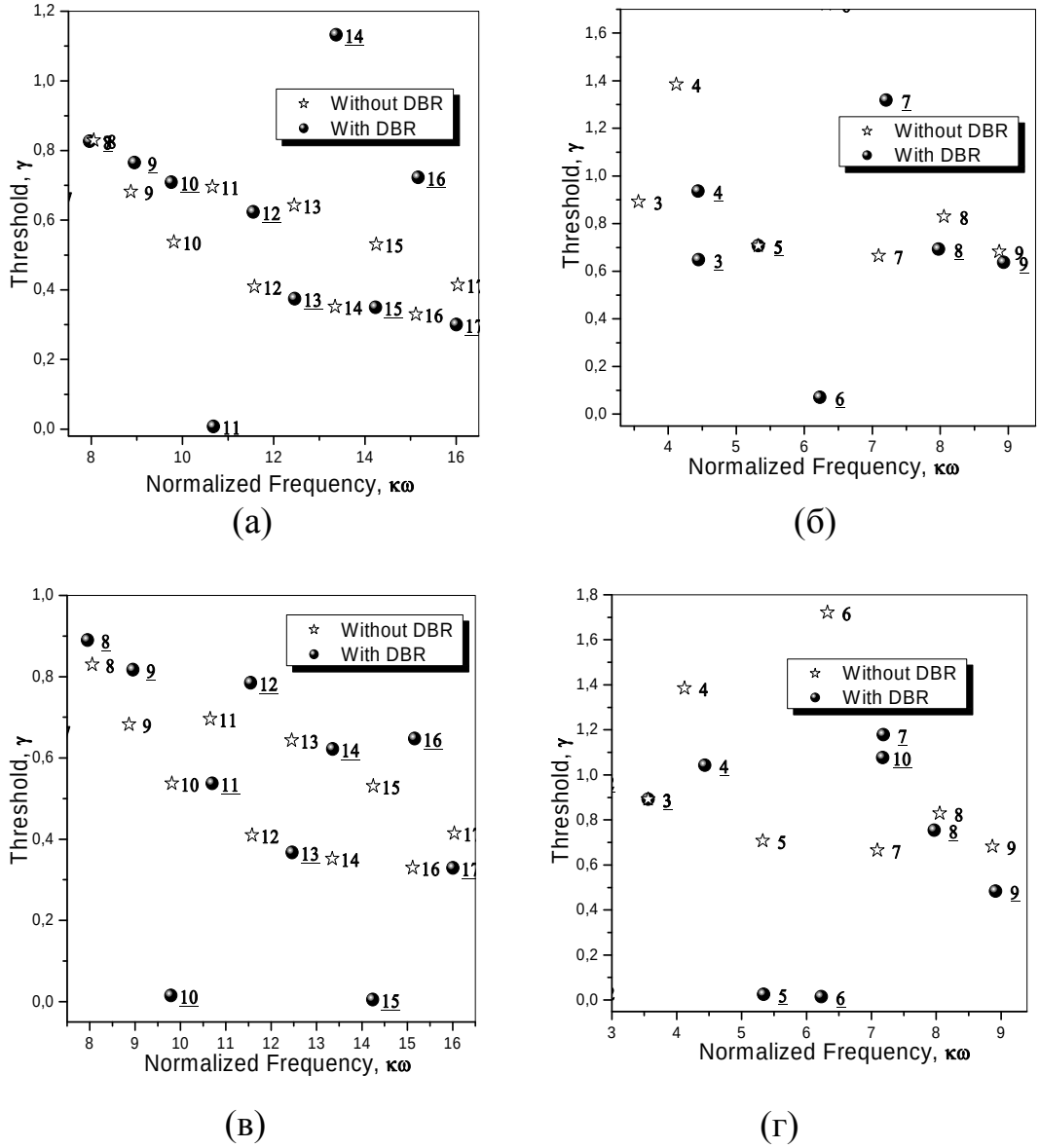
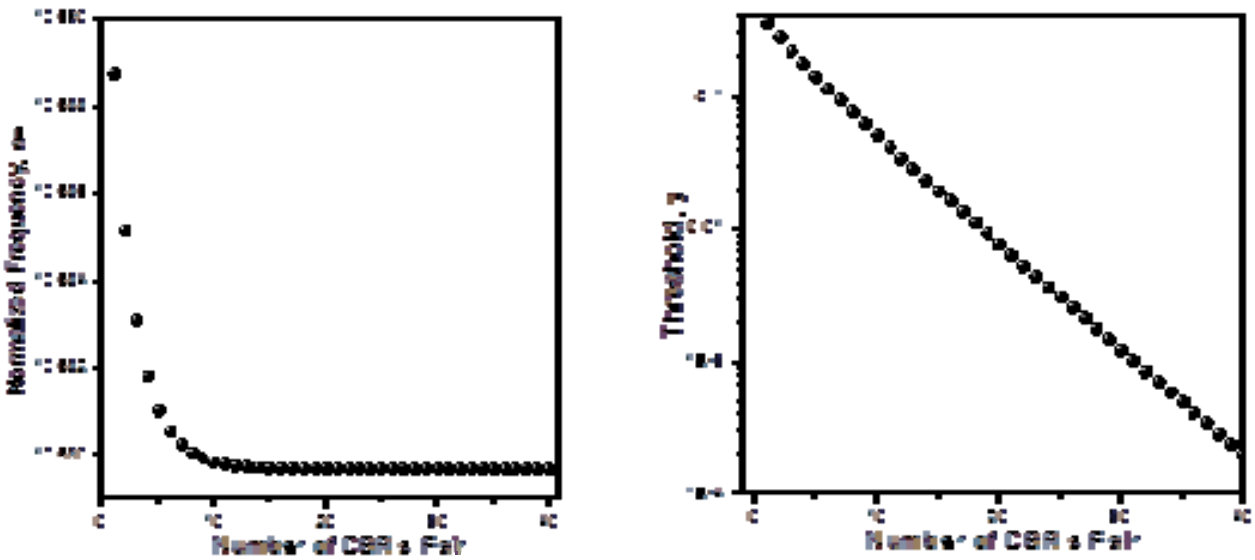


Рис. 2.9 Приклади впливa відбивачей Брегга на пороги самозюудження резонатора з GaAs з центральним активним шаром (усі розміри у нанометрах): (а) w_H =79.63, w_L =69.48, (б) w_H = 112.6, w_L = 27.9, (в) w_H = 93, w_L = 46.5, (г) w_H = 69.75, w_L = 69.75.

На Рис. 2.9 (а) представлені приклади власних пар чисел (κ,γ), тобто частот і порогів самозбудження лазера, для лазерів типу VCSEL різних геометрій з відбивачами Брегга і без них.

Однак сусідні моди, частоти яких не потрапляють в смугу замикання, не відчувають впливу розподілених відбивачів Брегга, і їх пороги залишаються приблизно такими ж або навіть підвищуються.



(а) (б)

Рис. 2.10 Залежності нормуваної власної частоти (а) та порога самозбудження (б) для моди E_{11} від числа пар шарів, при w_a=0.1w_c.

Слід зазначити, що в разі якщо власна частота моди потрапляє в смугу придушення, то, при подальшому збільшенні числа пар шарів *N,* поріг самозбудження знижується з експоненціальною швидкостю по відношенню до *N.* На Рис. 2.10 наведені власна частота і поріг моди з n = 11 для різних значень числа пар в розподілених відбивачах Брегга. Вони показує, що при зростанні *N* від 1 до 40 нормована частота κ_{11} знаходиться в межах смуги від 10.678 до 10.688, тоді як поріг γ_{11} падає від 0.7 до 2·10-4.

Змінюючи геометричні параметри розподіленого відбивача Брегга, можна змінити положення і ширину смуги замикання і тим самим вибрати моду, яка відчує значне зниження порога. У Таблиці 2.1 представлені такі результати для різних товщин шарів у відбивачі.

(а) w_H=79.63 w_L=69.49		(в) w_H=93 w_L=46.5		(б) w_H=112.6 w_L=27.9		(г) w_H=69.75 w_L=69. 75	
n= 11	$\kappa\omega$ = 10.67964 γ = 0.00771	n=10	$\kappa\omega$ = 9.78965 γ = 0.01544	n=6	$\kappa\omega$ = 6.2295 γ = 0.07291	n=5	$\kappa\omega$ = 5.33983 γ = 0.02537
		n=15	$\kappa\omega$ = 14.23951 γ = 0.00498			n=6	$\kappa\omega$ = 6.22978 γ = 0.0152

Таблица 2.1. Минимальные значения порогов разных мод для лазерного резонатор типа VCSEL с геометрией, соответствующей Рис. 2.9.

2.5 Теорема пойтінга для плоского відкритого резонатор з активної зоною

Оптична теорема або, інакше кажучи, комплексна теорема Пойнтінга, застосована до моди відкритого резонатора з обсягом *V* і поверхнею *S,* призводить до наступного виразу:

$$(1/2)\oint_S \vec{E}\times\vec{H}^* ds = (ik/2)\int_V (\varepsilon^* Z_0^{-1}|\vec{E}|^2 - \mu Z_0 |\vec{H}|^2) dv, \qquad (2.5.1)$$

де, $\varepsilon = \nu^2$ а величина ν - це ступінчаста функція, що відповідає коефіцієнту заломлення. Матеріальна частина (2.6.1) говорить про те, втрати на випромінювання і згенерувала енергія збалансовані. Слід зазначити, що вираз (2.6.1) випливають з рівнянь Максвелла для довільного відкритого резонатора з активною зоною, на основі векторної алгебри і формули Гріна [124]. Якщо прийняти, що частота $k = \mathrm{Re}\,k$ дійсна, тоді дійсна частина потоку вектора Пойнтінга, що проходить через поверхню *S* (ліва частина (2.6.1)) позитивна тільки тоді, коли один з матеріальних параметрів ε або μ має «активну» уявну частину хоча б в якийсь частини обсягу *V,* іншими словами відкритий резонатор містить активну зону.

Розглянемо одновимірну модель простого резонатора Фабрі-Перо, вивченого в параграфі 2.2. Тоді вираз (2.6.1) спрощується до,

$$\frac{1}{2k}\mathrm{Re}\left[E_0(0)\alpha_0 \frac{\partial E_0^*(y)}{\partial y}\bigg|_{y=0} + E_N(d_N)\alpha_N \frac{\partial E_N^*(y)}{\partial y}\bigg|_{y=d_N}\right] = \gamma\alpha_q k \int_{d_q}^{d_{q+1}} |E_q(y)|^2\, dy \quad (2.5.2)$$

або

$$\alpha_0 |A_0|^2 + \alpha_N |B_N|^2 = \gamma\alpha_q \kappa^2 \left[\left|A_q\right|^2 e^{-2k\gamma y} + \left|B_q\right|^2 e^{2k\gamma y} + 2\Re(B_q A_q^*)\cos(2k\alpha y)\right] (2.5.3)$$

Введемо коефіцієнт перекриття,

$$\Gamma^{(f)} = W^{(f)} / W \le 1, \qquad (2.5.4)$$

де, $f = a, p$ і індекс a відповідає активній зоні, а p - пасивної частини.

$$W^{(f)}(k,\gamma) = \int_{V_f} \alpha^2 \,|\, \vec{E}(y) \,|^2 dv, \qquad (2.5.5)$$

$$W(k,\gamma) = \int_V \alpha^2 \,|\, \vec{E} \,|^2 dv = \int_{V_a} \alpha^2 \,|\, \vec{E} \,|^2 dv + \int_{V_p} \alpha^2 \,|\, \vec{E} \,|^2 dv, \qquad (2.5.6)$$

У термінах цих коефіцієнтів, теорема Пойнтінга (або оптична теорема) може бути переписана так

$$\gamma = \frac{\alpha_q P}{\Gamma^{(a)} W}, \qquad (2.5.7)$$

де P - втрати енергії на випромінювання, а W - ефективний обсяг моди з номером *n*. Величина, зворотна їх відношенню - це узагальнений Q-фактор,

$$\tilde{Q} = W(\kappa_n, \gamma_n) / P(\kappa_n, \gamma_n). \qquad (2.5.8)$$

Можна додати, що, якщо поріг має малу величину $\gamma = o(\kappa)$,то останній вираз спрощується до

$$\tilde{Q} \approx W(k_n, 0) / P(k_n, 0) + O(\gamma_n^2). \qquad (2.5.9)$$

Таким чином, для мод з малим порогом, відповідний їм Q-фактор близький до Q-фактору такой же моди в пасивному резонаторі або в цьому ж резонаторі при відсутності накачування. Формули (2.5.7) - (2.5.9) показують, що для того, щоб мода мала низький поріг, недостатньо того, щоб її добротність мала велике значення - рівнозначну роль відіграє і коефіцієнт перекриття активної зони і *E*-поля моди.

Для ілюстрації цього висновку розглянемо той же найпростіший резонатор Фабрі-Перо з активним шаром, що і на Рис. 2.5. Рис.2.14 демонструє зміну коефіцієнта перекриття для обраних мод з ростом відносної товщини активної зони. Порівняння Рис.2.5 (б) і Рис. 2.14 показує, що поріг дійсно веде себе зворотньо пропорційно по відношенню до коефіцієнта перекриття поля моди і активної зони.

Слід зазначити, що при підстановці лазерних власних значень, отриманих з рівнянь (2.1.5) або (2.4.3), в (2.5.7) виявляється, що теорема Пойнтінга виконується на рівні машинної точності.

Викладений в даному розділі підхід можна легко адаптувати до розгляду більш складних одновимірних моделей лазерів типу VCSEL. Наприклад, такі моделі можуть містити численні активні зони («квантові каскади»), додаткові підкладки, металеві дзеркала, і інші елементи конструкції.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

В даному розділі була розглянута лазерна задача на власні значення для одновимірних плоскошаруватих резонаторів. За допомогою такої постановки задачі були досліджені моди випромінювання для простих моделей лазерів: мікрорезонатора, що складається з діелектричного шару з активною зоною, і моделі типу VCSEL у вільному просторі. За результатами досліджень, опублікованих в статтях [1,3] і працях конференцій [9-14, 16-17, 19, 21, 22, 27], можна зробити наступні висновки:

1. Для мікрорезонатора, що складається з діелектричного шару з активною зоною, чисельний аналіз симетричних і антисиметричних мод, а також, асимптотичні наближення для порога і частоти самозбудження показав, що поріг зростає зі зменшенням відносного об'єму активної зони в мікрорезонатора.
2. Для несиметричного мікрорезонатора, що складається з діелектричного шару зі зрушено від центру активною зоною, показано, що поріг самозбудження залежить від ступеня перекриття активної зони і *E*-компоненти електромагнітного поля даної моди.
3. Для резонатора типу VCSEL, який представляє собою плоский діелектричний шар з розташованої в центрі нього активною зоною, поміщений між двома відбивачами Брегга, показано, що пороги самозбудження істотно падають при збільшенні числа пар в відбивачах Брегга тільки тих мод, частоти самозбудження яких знаходяться в смузі замикання цих відбивачів Брегга.
4. Застосування теореми Пойнтінга до діелектричних шару з активною зоною підтвердило, що поріг самозбудження дійсно веде себе зворотньо-пропорційно до коефіцієнта перекриття поля моди і активної зони. Додатково показано, що при підстановці точних лазерних власних значень, теорема Пойнтінга виконується на рівні машинної точності.

РОЗДІЛ 3
ЧАСТОТИ І ПОРОГИ МОД ОДИНОЧНІЙ ГРАТИ З КВАНТОВИХ НИТОК

Сучасні технології роблять можливим виробництво складних лазерних пристроїв, заснованих на одиничних чи багатьох квантових нитках, поміщених в епітаксійних вирощені напівпровідникові мікрорезонатори. Перевага квантових ниток в порівнянні з плоскими шарами (квантовими колодязями) полягає в їх більшої резистентності до температурних змін, меншою хімічної реактивності і більш високу механічну стійкість.

В цьому розділі вивчається періодична решітка з нескінченних кругових діелектричних ниток. Такі грати дозволяє побудувати модель, яка, з одного боку, близька до реальної структурі, а з іншого боку, дозволяє вести швидкі і точні розрахунки, а також аналітично виводити асимптотичні приближення.

3.1 Постановка та основні рівняння задачі розсіяння та ЛЗВЗ

У цьому розділі вивчається структура, що являє собою періодичну послідовність ідентичних нескінченних кругових ниток паралельних осі Z, розташовану уздовж осі X. Відстань між осями ниток p, радіус кожної нитки дорівнює a. Таким чином, геометрія структури не залежить від координати Z (Рис. 3.1). Коефіцієнт заломлення немагнітного матеріалу ниток дорівнює в задачі розсіювання α і в лазерної задачі $\nu = \alpha - i\gamma$. Як і раніше, будемо розглядати електромагнітне поле з залежністю від часу $\sim e^{-i\omega t}$.

Для повноти дослідження, розглядаються дві незалежні поляризації E і H, які можуть бути описані за допомогою функції $U(x,y)$, яка відповідає компоненті електромагнітного поля E_z або $Z_0 H_z$.

Так як основна мета даної роботи - це рішення лазерної завдання, то в якості допоміжної завдання розглядається розсіювання плоскої хвилі, що падає по нормалі до решітки $(\beta = 0)$.У такому випадку ми маємо умову періодчності, $U(x+p,y) = U(x,y)$. Тоді падаюче поле має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} e^{-iky} &= e^{-ik\rho\sin\varphi} = e^{-ik\rho\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\varphi} J_n(kr) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} J_{-n}(kr) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{in\varphi} J_n(kr) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Умова періодичності означає, що поля всередині кожної з ниток рівні між собою, як і значення поля на границях циліндрів. Таким чином, ми можемо ввести локальні системи координати, коаксіальні з нитками (r_s, φ_s). Тоді внутрішньо U_s^{int} і зовнішнє U_s^{out} поле s-її нитки може бути виражено в локальних координатах як

$$U_s^{\text{int}}(r_s,\varphi_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n^s J_n(\nu k r_s)e^{in\varphi_s},\quad r_s<a\,, \tag{3.1.2}$$

$$U_s^{out}(r_{s,}\varphi_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n^s H_n^{(1)}(kr_s)e^{in\phi_s},\quad r_s>a. \tag{3.1.2}$$

Зовнішнє поле в глобальній системі координат (r,φ) з початком на осі нульовий нитки складається з сими вкладів з усіх ниток виду (3.1.2) і має наступний вигляд

$$U^{out}(r,\varphi)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}U_s^{out}(r_{s,}\varphi_s)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n^s H_n^{(1)}(kr_s)e^{in\phi_s},\quad r_s>a \tag{3.1.3}$$

Поле у останньому вигляді задовольняє рівняння Гельмгольца, а також умові локальної кінцівки енергії. Проте таке представлення полю (3.1.3) не є зручним, тому що містить змінні в різних системах координат. Для приведення цього рівняння до глобальної системи координат скористаємося теоремою сумовування для функцій Ханкеля [125],

$$H_n^{(1)}(k\rho_s)e^{in\varphi_s}=\sum_{(l)}H_{n-l}^{(1)}(ksp)J_l(k\rho)e^{in\varphi}\,. \tag{3.1.4}$$

За допомогою цієї формули (3.1.3) можна переписати наступним виглядом:

$$U^{out}(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n H_n^{(1)}(k\rho)e^{in\varphi}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\sum_{s\neq 0}\sum_{l=-\infty}^{\infty}H_{n-l}^{(1)}(ksp)J_l(k\rho)e^{il\varphi}\,, \tag{3.1.5}$$

або

$$U^{out}(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n H_n^{(1)}(k\rho)e^{in\varphi}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\sum_{l=-\infty}^{\infty}S_{n-m}J_l(k\rho)e^{il\varphi}\,, \tag{3.1.6}$$

де S_l - так звані граткових суми, які будуть обговорені пізніше,

$$S_l = \sum_{s' \neq 0} H_l^{(1)}(ksp). \tag{3.1.7}$$

Безперервність на границі 0-й нитки $(r = a)$ веде до системи лінійних рівнянь щодо невідомих $\{c_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ и $\{b_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$

$$\begin{aligned} c_m J_m(\nu ka) &= b_m H_m^{(1)}(ka) + \sum_{(n)} b_n J_m(ka) S_{m-n} + (-1)^m J_m(ka), \\ \nu^{\pm 1} c_m J'_m(\nu ka) &= b_m H_m^{(1)\prime}(ka) + \sum_{(n)} b_n J_m{}'(ka) S_{m-n} + (-1)^m J'_m(ka), \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

де знак «+» відповідає Е-поляризації, а «-» - Н- полярізвціі.

Виключаючи коефіцієнти $\{c_m\}$,можна отримати наступне матричне рівняння:

$$b_m + \sum_n \frac{S_{n-m}(\kappa\xi) V_m^{E,H}(\kappa)}{F_m^{E,H}(\kappa)} b_n = \frac{(-1)^m V_m^{E,H}(\kappa)}{F_m^{E,H}(\kappa)}, \tag{3.1.9}$$

де $\kappa = ka,\ \xi = p/a.$ Тут використані наступні позначення:

$$V_m^E = \nu J_m(ka) J'_m(\nu ka) - J'_m(ka) J_m(\nu ka) \tag{3.1.10}$$

$$F_m^E = \nu H_m(ka) J'_m(\nu ka) - H'_m(ka) J_m(\nu ka) \tag{3.1.11}$$

$$V_m^H = \frac{1}{\nu} J_m(ka) J'_m(\nu ka) - J'_m(ka) J_m(\nu ka) \tag{3.1.12}$$

$$F_m^H = \frac{1}{\nu} H_m(ka) J'_m(\nu ka) - H'_m(ka) J_m(\nu ka) \tag{3.1.13}$$

Слід зазначити, що вирази $F_m^{E,H} = 0$ є характеристичними рівняннями одиничної кругової діелектричної нитки з коефіцієнтом заломлення ν і азимутального порядку m у відповідній поляризації. Рівняння (3.1.9), строго кажучи, не є рівняннями Фредгольма другого роду. Тому необхідно вдатися до заміни змінних,

$$x_m = b_m / J_m^l(ka) \tag{3.1.14}$$

і тоді рівняння (3.1.9) матиме наступний вигляд:

$$x_m + \sum_n \frac{S_{n-m}(kp) V_m J_n^l(ka)}{F_m J_m^l(ka)} x_n = \frac{(-1)^m V_m}{F_m J_m^l(ka)}, \tag{3.1.15}$$

$$A = \left| A_{n,m} \right|_{n,m=-\infty}^{\infty}, \quad A_{n,m} = \delta_n^m + \frac{S_{n-m}(kp) V_m J_n^l(ka)}{F_m J_m^l(ka)}, \tag{3.1.16}$$

Це рівняння є рівнянням Фредгольма другого роду з огляду на досить швидкого зменшення елементів матриці . Для перевірки цього факту використовуються асимптоти функцій Бесселя і Ханкеля для великих значень порядку,

$$J_m(\alpha x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{e\alpha x}{2m} \right)^m \quad H_m(\alpha x) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi m}} \left(\frac{e\alpha x}{2m} \right)^{-m} \tag{3.1.17}$$

В результаті отримуємо такі асимптоти для виразів (3.1.10-13) при $m \to \infty$:

$$F_m^E \sim \frac{2\alpha^m}{\pi\kappa} \qquad V_m^E \sim \frac{e\alpha^m}{2\pi} \frac{(e\kappa)^{2m-1}}{(2m)^{2m}} \tag{3.1.18}$$

Таким чином, елементи матриці (3.1.16)) мають таку поведінку:

$$\left|A_{n,m}\right| \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m^{(l-2)m+l/2}(n-m)^n}{n^{ln+1+l/2}(n-m)^{m+1/2}} 2^{lm-2m-ln-1/2} \frac{\left(e\kappa\right)^{ln-n+3m-lm}}{\xi^{n-m}}. \qquad (3.1.19)$$

Найбільш вдалими значеннями для l є 1 і 2, коли

$$\left|A_{n,m}(l=1)\right| \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m^{-m+1/2}(n-m)^n}{n^{n+3/2}(n-m)^{m+1/2}} 2^{-m-\mathrm{n}-1/2} \frac{\left(e\kappa\right)^{2m}}{\xi^{n-m}}, \qquad (3.1.20)$$

$$\left|A_{n,m}(l=2)\right| \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m(n-m)^n}{n^{2n+2}(n-m)^{m+1/2}} 2^{2\mathrm{n}-1/2} \frac{\left(e\kappa\right)^{n+m}}{\xi^{n-m}} \qquad (3.1.21)$$

В обох випадках матриця (3.1.16) обмежена по нормі в l_2,

$$\left\|A_{n,m}(l=1,2)\right\|_{l_2} < \infty. \qquad (3.1.22)$$

У випадку власної задачі, падаюче поле відсутнє, а матеріал ниток має посилення, $\nu = \alpha - i\gamma$. Тоді пошук лазерних власних значень зводиться до відшукання коренів детермінантного рівняння,

$$det\, A(\kappa,\gamma) = 0. \qquad (3.1.23)$$

3.2 Граткові суми, способи сумовування і їх асимптотичні наближення

Основним об'єктом вивчення в цьому параграфі є граткових суми, згадані в попередньому параграфі, а також деякі допоміжні функції, які будуть використовуватися у всій роботі. Так як суми (3.1.7) мають симетричний вид, то всі непарні елементи дорівнюють нулю в силу непарності функцій Ханкеля за індексом порядку

$$S_m(kp) = \begin{cases} 2\sum\limits_{s>0} H_m(skp), & m = 2n \\ 0, & m = 2n+1 \end{cases}, \qquad (3.2.1)$$

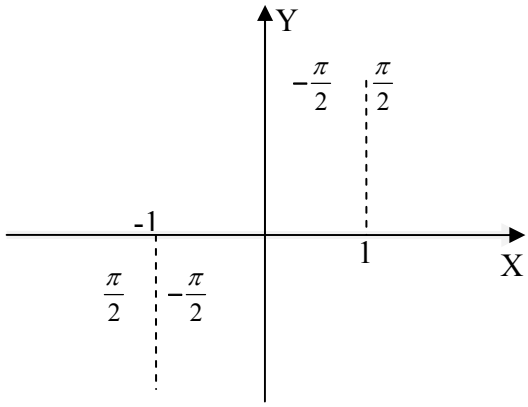


Рис. 3.2 Розрізи функції $\tau(z)$

Пряме сумування даних виразів є вкрай витратним з точки зору машинного часу. Для прискорення збіжності даних сум було запропоновано кілька підходів, які використовують аналітичні перетворення. Введемо допоміжні функції, зокрема, функцію комплексного $\tau(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ аргументу,де розрізи обрані відповідно до Рис. 3.2 - це лінії $(1, iy),\ y \geq 0$ и $(-1, -iy),\ y \geq 0$. Для однозначного $z - 1 = r_+ e^{i\theta_+}$ $\left(-\frac{3\pi}{2} < \theta_+ < \frac{\pi}{2}\right)$

Прямое суммирование данных выражений является крайне затратным с точки зрения машинного времени. Для ускорения сходимости данных сумм было предложено несколько подходов, которые используют аналитические преобразования. Введем вспомогательные функции, в частности, функцию комплексного аргумента $\tau(z) = \sqrt{z^2 - 1}$, где разрезы выбраны в соответствии с Рис. 3.2 - это линии $(1, iy),\ y \geq 0$ и $(-1, -iy),\ y \geq 0$. Для однозначного визначення функції $\tau(z)$, введемо позначення

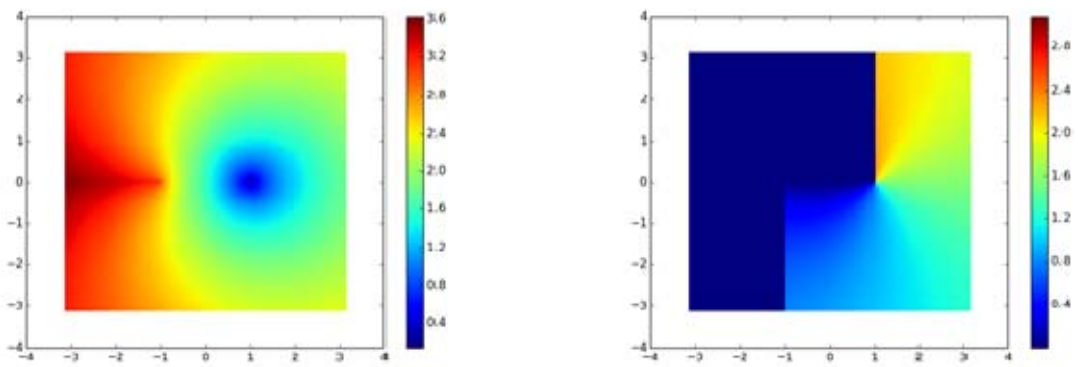


Рис. 3.3 Абсолютные значения функции $\tau(z)$ (слева) и ее аргумент (справа)

$z-1=r_+e^{i\theta_+}$ $\left(-\frac{3\pi}{2}<\theta_+<\frac{\pi}{2}\right)$ и $z+1=r_-e^{i\theta_-}$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta_-<\frac{3\pi}{2}\right)$ тоді

$$\tau(z)=r_+r_-e^{i(\theta_++\theta_-)/2}. \tag{3.2.2}$$

Значення цієї функції на дійсній осі визначаються як

$$\tau(t)=\begin{cases}\sqrt{t^2-1}, & |t|\geq 1\\ -i\sqrt{1-t^2}, & |t|<1.\end{cases} \tag{3.2.3}$$

Для цієї функції мають місце такі властивості:

$$t^2-\tau^2(t)=1, \tag{3.2.4 а}$$

$$t-\tau(t)=(\tau(t)+t)^{-1}, \tag{3.2.4 б}$$

які дозволяють ввести узагальнений кут ϕ_s с параметрами $\pi_s=\frac{2\pi s}{ka}$, і $\tau_s=\tau\left(\pi_s\right)$, де

$$\pi_s=\frac{2\pi s}{ka}=\cos\phi_s, \tag{3.2.4}$$

$$\tau_s=\tau\left(\pi_s\right)=-i\sin\phi_s, \tag{3.2.5}$$

$$e^{\mp i\phi_s}=\pi_s\pm\tau_s. \tag{3.2.6}$$

Якщо $|\pi_s|<1$, тоді узагальнений кут має речові значення. В іншому випадку, якщо $|\pi_s|>1$, то ϕ_s - $\boldsymbol{\phi_s}$ - комплексне число, і тоді необхідно ввести нову змінну $q_s>0$, таку що

$$\cosh q_s=|\pi_s| \quad \text{і} \qquad \sinh q_s=\sqrt{\pi_s^2-1} \tag{3.2.7}$$

Величини ϕ_s і q_s пов'язані наступним виразом

$$\phi_s = \begin{cases} iq_s, & \pi_s > 1 \\ \pi - iq_{s,} & \pi_s < -1 \end{cases} \tag{3.2.8}$$

З визначення функції $\tau(z)$ випливає вираз до її наближення при великих значення порядку

$$\tau_s \xrightarrow[s\to\infty]{} |\pi_s| = \pi_{|s|}. \tag{3.2.9}$$

Важливе значення має узагальнений кут нульового порядку,

$$\phi_0 = \pi/2, \qquad \tau_0 = -i, \qquad \pi_0 = 0 \tag{3.2.10}$$

і його значення для порядків з знаками,

$$\phi_s = \pi/2 - \phi_{-s},\ \tau_s = \tau_{-s},\ \pi_s = -\pi_{-s}. \tag{3.2.11}$$

3.2.1 Інтегральне представлення

Тут і далі використовується наступне інтегральне представлення функції Ханкеля першого порядку:

$$H_n(kr)e^{in\phi} = \frac{(-i)^{n+1}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ik\tau(t)|y|}}{\tau(t)}e^{ikxt}(t-\tau(t))^{n\,\mathrm{sgn}(y)}\partial t \tag{3.2.12}$$

Даний інтеграл береться по дійсній осі, минаючи точки розгалуження $t=1$ знизу і $t=-1$ зверху, відповідно до Рис. 3.2. Інтеграл збігається для всіх значень y крім 0.

К. Ясумото [62] запропонував обчислювати суми (3.2.1) підставляючи уявлення (3.2.12) безпосередньо в суму і використовуючи формулу підсумовування Пуассона,

$$S_{2m}(kp) = 2\sum_{s>0} H_{2m}(skp) = \frac{2(-i)^{2m+1}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s>0} e^{-i\tau(t)skp}\frac{(t-\tau(t))^{2m}}{\tau(t)}\partial t \qquad (3.2.13)$$

Підінтегральна сума сходиться для всіх значень t, причому

$$\sum_{s>0} e^{-i\tau(t)skp} = \frac{e^{-i\tau(t)kp}}{1-e^{-i\tau(t)kp}} \qquad (3.2.14)$$

$$S_{2m}(kp) == \frac{-2i(-1)^m}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\tau(t)kp}}{1-e^{-i\tau(t)kp}}\frac{(t-\tau(t))^n}{\tau(t)}\partial t \qquad (3.2.15)$$

Збіжність останнього інтеграла обумовлюється наявністю експоненти як множника. Мажоранту до цього інтеграла можна вивести наступним чином:

$$\left|\int_a^{\infty}\frac{e^{-i\tau(t)kp}}{1-e^{-i\tau(t)kp}}\frac{(\sqrt{1-t^2}+it)^n}{\sqrt{1-t^2}}dt\right| \le \frac{2^n}{(1-e^{-xa})x^{n+1}}\left|\int_{ax}^{\infty}e^{-t}t^n dt\right| = \frac{(2a)^n e^{-ax}}{(1-e^{-ax})x^{n+1}} \qquad (3.2.16)$$

Щоб обійти полюса в точках $t = \pm 1$, необхідно поміняти лінію інтегрування з дійсної осі на бісектрису першого і третього квадранта. Тоді

$$S_{2m}(kp) = \frac{(-1)^m \cdot 2(1-i)}{\pi}\int_0^a F(s,kp)(G(n,s)+G(n,-s))dt, \qquad (3.2.17)$$

де $s = (1+i)t$ и

$$F(t,kp) = \frac{e^{-ikp\tau(t)}}{\tau(t)(1-e^{-ikp\tau(t)})} \qquad (3.2.18)$$

$$G(n,t) = (\tau(t)+it)^n \qquad (3.2.19)$$

Параметр a в (3.2.17) може бути зафіксований рівним 10 для більшості значення частоти, а чисельне інтегрування можна виконати за допомогою найпростішого правила трапецій.

3.2.2 Метод тверського

Досконаліший підхід для обчислення граткових сум був запропонований В. Тверським [69], який привів ці суми до наступного вигляду:

$$S_0 = -1 - \frac{2i}{\pi}(\gamma + \log\frac{ka}{4\pi}) - \frac{2i}{ka\tau_0} + \sum_{s\neq 0}\left(\frac{i}{\pi|s|} - \frac{2i}{ka\tau_s}\right) \tag{3.2.20}$$

$$\begin{aligned} S_n = &\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{(\pi_s - \mathrm{sgn}(s)\tau_s)^n}{i\tau_s} + \frac{2i^{n+1}}{n\pi}\cos\left(n\pi/2\right) \\ &+ \frac{i^n}{\pi}\sum_{j=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^j\frac{(n+j-1)!}{j!(n-2-j)!}\left(\frac{4\pi}{ka}\right)^{n-2j}B_{n-2j} \end{aligned}, \tag{3.2.21}$$

де B_j є коефіцієнтами Бернуллі. В даному випадку $S_{2n+1} = 0$ для будь-якого $n \geq 0$, оскільки $B_{2n+1} = 0, n > 0$ і $B_1 = -1/2$. Час розрахунків може бути скорочено, якщо застосувати метод Куммера до даних формул. У такому випадку ми маємо такі вирази:

$$\begin{aligned} S_0(x) = &-1 - \frac{2i}{\pi}(\gamma + \log\frac{ka}{4\pi}) - \frac{2i}{ka\tau_0} \\ &+ \sum_{s\neq 0}\left(-\frac{2i}{ka\tau_s} - \frac{i}{\pi|s|} + i\frac{(ka)^2}{2\pi^3 s^3}\right) - \frac{i(ka)^2\zeta(3)}{2\pi^3} \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

$$\begin{aligned} S_n = &\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left[\frac{(\pi_s - \mathrm{sgn}(s)\tau_s)^n}{i\tau_s} + 2i\,\mathrm{sgn}^s(n)\frac{(ka)^{n+1}}{(4\pi s)^{n+1}}\right] - 4i\frac{(ka)^{n+1}}{(4\pi)^{n+1}}\zeta(n+1) \\ &+ \frac{2i^{n+1}}{n\pi}\cos\left(n\pi/2\right) + \frac{i^n}{\pi}\sum_{j=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^j\frac{(n+j-1)!}{j!(n-2-j)!}\left(\frac{4\pi}{ka}\right)^{n-2j}B_{n-2j} \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

де $\zeta(n)$ є дзета функція

$$\zeta(n) = \sum_{m>0} \frac{1}{m^n} \tag{3.2.24}$$

Застосовуючи властивості (3.2.11 можна спростити вирази для граткових сум,

$$\begin{aligned} S_0(x) &= -1 - \frac{2i}{\pi}(\gamma + \log\frac{x}{4\pi}) - \frac{2i}{x\tau_0} \\ &+ \sum_{s>0}\left(-\frac{4i}{ka\tau_s} - \frac{2i}{\pi s} + i\frac{(ka)^2}{2\pi^3 s^3}\right) - \frac{ix^2\zeta(3)}{2\pi^3} \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

$$\begin{aligned} S_n &= (-\tau_0)^{n-1} i + \sum_{s>0}\left[2\frac{(\pi_s - \tau_s)^n}{i\tau_s} + 4i\frac{(ka)^{n+1}}{(4\pi s)^{n+1}}\right] - 4i\frac{(ka)^{n+1}}{(4\pi)^{n+1}}\zeta(n+1) \\ &+ \frac{2i^{n+1}}{n\pi}\cos\left(n\pi/2\right) + \frac{i^n}{\pi}\sum_{j=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^j \frac{(n+j-1)!}{j!(n-2-j)!}\left(\frac{4\pi}{ka}\right)^{n-2j} B_{n-2j} \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Останні вираження найбільш зручні завдяки високій швидкості збіжності та точності, а також зважаючи на наявність явно виражених полюсів.

3.2.3 Перетворення Евальда

Цей спосіб був запропонований в роботі [63-64] і використовує перетворення Евальда, яке включає в себе два попередніх методів і вимагає введення η параметра, що використовується для контролю швидкості збіжності сум.

$$S_n = S_n^{(0)} + S_n^{(1)} + S_n^{(2)}, \tag{3.2.27}$$

$$S_n^{(0)} = \delta_n^0 \left(-1 - \frac{i}{\pi} Ei\left(\frac{k^2}{4\eta^2} \right) \right), \tag{3.2.29}$$

$$S_n^{(1)} = -\frac{i^{n+1}}{ka} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{2}{\tau_m} \sum_{q=0}^{[n/2]} \binom{n}{2q} (\pm m)^{n-2q} \tau^{2q} \Gamma_{qm}, \tag{3.2.30}$$

де

$$\Gamma_{qm} = erfc\left(\frac{k\tau_m}{2\eta} \right) - e^{-k^2\tau_m^2/4\eta^2} \sum_{q=1}^{q} \frac{(k\tau_m/2\eta)^{1-2s}}{\Gamma(3/2-s)}, \tag{3.2.31}$$

$$S_n^{(2)} = -\frac{2^{n+1} i}{\pi} \sum_{m>1} e^{\mp n\pi} \left(\frac{am}{k} \right)^n \int_\eta^\infty e^{k^2/4\xi^2} e^{-(ma\xi)^2} \xi^{2n-1} d\xi. \tag{3.2.32}$$

У даній роботі параметр η вибирається рівним 0.5, що дає швидкість збіжності приблизно рівну методу Тверського.

3.2.3 Асимптотичне наближення і значення граткових сум

Оскільки нас цікавлять граткових резонанси, які виникають поблизу точок розгалуження граткових сум, то розглянемо асимптотические наближення для цих сум при $\sigma \to s - 0$. Згідно (3.2.27) і (3.2.25),

$$S_0 \approx -\frac{2i}{ka\tau_s} = -\frac{i\sigma}{\pi\tau_s}, \qquad \sigma \to s - 0 \tag{3.2.33}$$

$$S_n \approx \frac{(\pi_s - \tau_s)^n}{i\tau_s} + \frac{(\pi_{-s} + \tau_{-s})^n}{i\tau_{-s}}, \quad \sigma \to s - 0 \tag{3.2.34}$$

Згодом нам знадобляться також наступні суми:

$$S_{2n} + S_0 \approx \frac{2}{i\tau_s} + \frac{2}{ka\tau_s} = \frac{2}{i\tau_s}(1 + 2\pi) \tag{3.2.35}$$

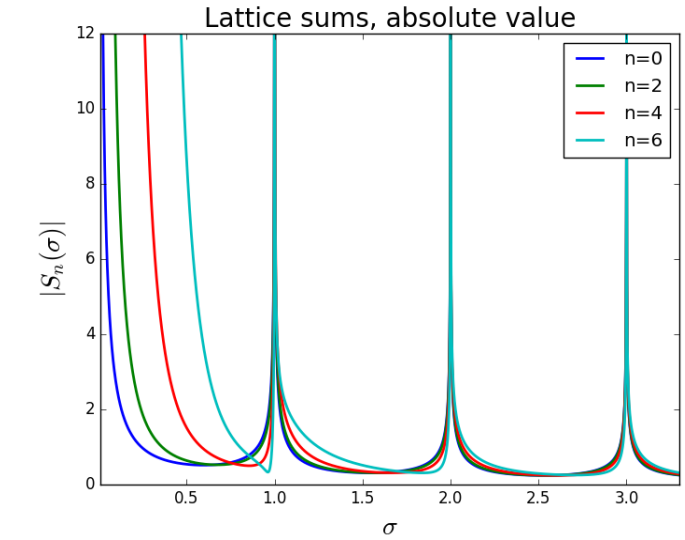
$$S_{2n} + S_{2l} \sim \frac{4}{i\tau_s}, \qquad \sigma \to s - 0. \tag{3.2.36}$$

Поведінка граткових сум при великих значеннях порядку має наступний вигляд:

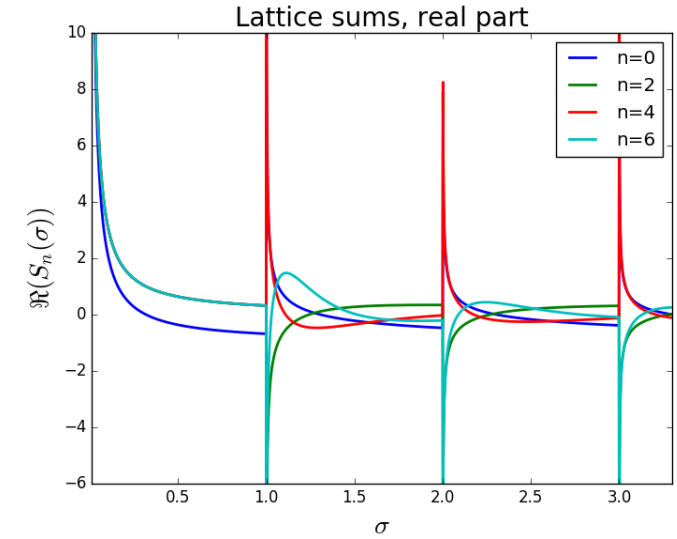
$$S_n \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sum_{m>0}\frac{(ekam)^{-n}}{(2\pi n)^{-n}} = -\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sum_{m>0}\frac{(2\pi n)^n}{(e\sigma m)^n}$$
$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi l}}\frac{(2\pi n)^n}{(e\sigma)^n}\sum_{m>0}\frac{1}{m^n} = -\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\frac{(2\pi n)^n}{(e\sigma)^n}\zeta(n) \qquad (3.2.37)$$

$$S_n \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\frac{(2\pi n)^n}{(e\sigma)^n} \quad , n \to \infty \qquad (3.2.38)$$

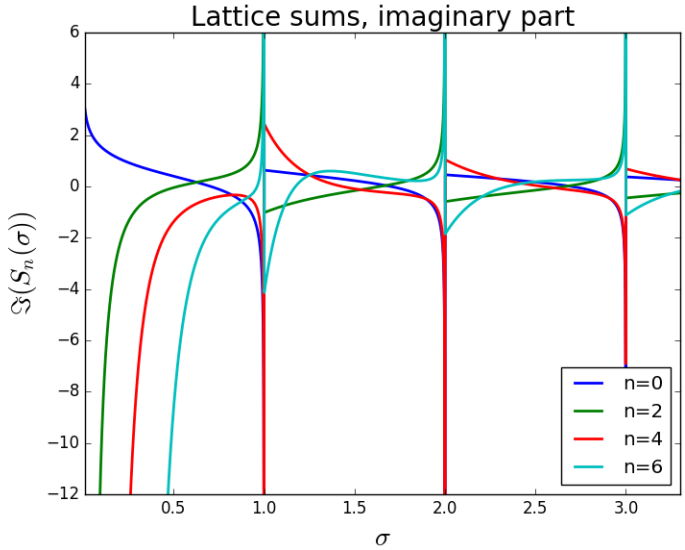
Чисельні значення граткових сум представлені на Рис. 3.4. Порівняння швидкості розрахунків представлено в Таблиці 3.1.



(а)



(б)



(в)

Рис. 3.4 Значення граткових сум, (а) – модуль, (б) – реальна частина, (в) – уявна частина.

n	Значение $S_n(k)$	Метод Тверского	Метод Тверского с ускорением Куммера	Метод Тверского с учетом четности
0	-.436591501455+ 0.280878145329j	82.141	2.4690	1.59
2	0.563408498545+ 0.0707398785168j	44.108	2.577	1.5
4	0.563408498545- 0.929483414702j	1.796	0.687	0.405
6	0.563408498545- 4.7101104591j	0.532	0.375	0.234
8	0.563408498545- 50.8767312112j	0.296	0.297	0.203
0	0.563408498545- 1056.61215501j	0.219	0.233	0.156
12	0.563408498545- 34621.5640892j	0.171	0.203	0.140
14	0.563408498545- 1639467.97155j	0.171	0.202	0.140
16	0.563408498545- 105849483.525j	0.171	0.219	0.157
18	0.563408498545- 8917567579.74j	0.187	0.203	0.155
20	0.563408498545- 949293328301j	0.157	0.155	0.125

Таблица 3.1 Значення граткових сум при $k = 2\pi/1.77$ і час підрахунку 1000 операцій в мілісекундах

3.3 Гармоніки Флоке і коефіцієнти відбиття і проходження

Через використання функцій Ханкеля, уявлення зовнішнього поля (3.16) непридатні для більших значень $|y| > d$. Тому необхідно переписати зовнішнє поле в вигляді рядів гармонік Флоке. Для цього повернемося до запису зовнішнього поля в локальних системах координат,

$$U^{scat}(r,\varphi) = \sum_s \sum_n b_n H_n^{(1)}(kr_s) e^{in\varphi_s} \tag{3.3.1}$$

і застосуємо до нього інтегральне перетворення (3.2.12),

$$U^{scat}(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\sum_n b_n(-i)^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_s e^{ik(x-sp)t}\frac{e^{-k\tau(t)|y|}}{\tau(t)}(t-\tau(t))^{n\,\mathrm{sgn}(y)}\partial t=$$
$$\frac{1}{\pi}\sum_n b_n(-i)^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_s e^{-ikspt}e^{ikx}\frac{e^{-k\tau(t)|y|}}{\tau(t)}(t-\tau(t))^{n\,\mathrm{sgn}(y)}\partial t \qquad (3.3.2)$$

Подінтегральну сумму суму можна перетворити за допомогою формули Пуассона $\sum e^{imt}=2\pi\sum\delta(t+2m\pi)$ і, використовуючи властивості дельта-функції, $\int\delta(ax+b)f(x)dx=\frac{1}{a}f\left(-\frac{b}{a}\right)$, можна перейти до ряду по гармоникам Флоке,

$$U(r,\varphi)=2\sum_n b_n(-i)^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_s \delta(kpt+2s\pi)e^{iktx}\frac{e^{-k\tau(t)|y|}}{\tau(t)}(t-\tau(t))^{n\,\mathrm{sgn}(y)}\partial t=$$
$$\frac{2}{kp}\sum_n b_n(-i)^{n+1}\sum_s e^{-ik\pi_s x}e^{-k\tau_s|y|}\frac{(-\pi_s-\tau_s)^{n\,\mathrm{sgn}(y)}}{\tau_s} \qquad (3.3.3)$$

Зручно переписати зовнішнє поле в рядах по експонентам для кожної напівпростору окремо,

$$U(r,\varphi)=\frac{-2i}{kp}\sum_n i^n b_n\sum_s e^{-ik\pi_s x}e^{-k\tau_s y}\frac{(\tau_s+\pi_s)^n}{\tau_s},\ y>0 \qquad (3.3.4)$$

$$U(r,\varphi)=\frac{-2i}{kp}\sum_n i^n b_n\sum_s e^{-ik\pi_s x}e^{k\tau_s y}\frac{(\tau_s-\pi_s)^n}{\tau_s}+e^{-iky},\ y<0 \qquad (3.3.5)$$

У виразі (3.3.5) другий додаток є другий член для хвилі, що пройшла, $e^{-iky}=e^{k\tau_0 y}e^{-ik\pi_0 x}$, записаний через гармоніки Флоке.

Тут і далі нарівні з частотою k буде використовуватися нормована на період решітки частота $\sigma=p/\lambda=pk/2\pi$.

Через те, що суми по експонентам сходяться абсолютно то, можна поміняти порядок сумування і отримати ряди по гармоникам Флоке для кожної півплощині,

$$U(r,\varphi)=\sum_s f_s^+ e^{-ik\pi_s x} e^{-k\tau_s y},\ y>0 \tag{3.3.6}$$

$$f_s^+=\frac{-i}{\pi\sigma\tau_s}\sum_n i^n(\pi_s+\tau_s)^n b_n=\frac{-i}{\pi\sigma\tau_s}\sum_n i^n e^{-in\phi_s} b_n \tag{3.3.7}$$

$$U(r,\varphi)=\sum_s f_s^- e^{-ik\pi_s x} e^{k\tau_s y},\ y<0 \tag{3.3.8}$$

$$f_s^-=\delta_s^0-\frac{i}{\pi\sigma\tau_s}\sum_n i^n(\pi_s-\tau_s)^n b_n=\delta_s^0-\frac{i}{\pi\sigma\tau_s}\sum_n i^n e^{in\phi_s} b_n \tag{3.3.9}$$

Тут символ Кронекера в поданні поля в нижній півплощині відповідає падаючому полю. Ці вирази дозволяють отримати коефіцієнти відбиття і проходження,

$$R=\sum_{|s|<2\pi\kappa}\left|f_s^+\right|^2 \tag{3.3.10}$$

$$T=\sum_{|s|<2\pi\kappa}\left|f_s^-\right|^2 \tag{3.3.11}$$

У випадку, якщо в діелектрику є втрати, то потужність втрат

$$A=1-T-R \tag{3.3.11}$$

3.4 Сімейства симетрій

Для зменшення часу чисельного розрахунку, можна розділити всі рівняння на класи відповідно до наявними лініями симетрії. Оскільки плоска хвиля падає нормально до площини решітки, можна використовувати симетрію геометрії решітки відносно осі Y Рис. 3.5. Для цього скористаємося поданням для зовнішнього поля (3.3.1) і застосуємо до нього умова симетрії $U(r,\pi-\varphi)=U(r,\varphi)$.

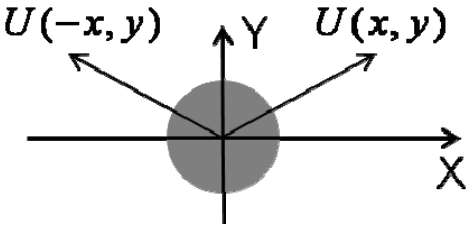


Рис. 3.5 Симетрія відносно осі Y

$$U(r,\pi-\varphi)=\sum_s\sum_n b_n H_n(kr_s)e^{in(\pi-\varphi_s)}=$$
$$\sum_s\sum_n(-1)^n b_n H_n(kr_s)e^{-in\varphi_s}=\sum_s\sum_n b_{-n}H_n(kr_s)e^{in\varphi_s}. \quad (3.4.1)$$

У результаті отримуємо умову щодо коефіцієнти розкладання зовнішнього поля,

$$b_n=b_{-n}\text{, якщо } U(x,y)=U(-x,y) \quad (3.4.2)$$

Тоді представлення зовнішнього поля через гармоніки Флоке має наступний вигляд:

$$
\begin{aligned}
f_s^+ &= \frac{-2i}{\pi\sigma\tau_s}\sum_n e^{in\frac{\pi}{2}} e^{-in\phi_s} b_n \\
&= \frac{-2i}{\pi\sigma\tau_s}\left(b_0 + \sum_{n>0} b_n (e^{in\left(\frac{\pi}{2}-\phi_s\right)} + e^{-in\left(\frac{\pi}{2}-\phi_s\right)}) \right) \\
&= \frac{-2i}{\pi\sigma\tau_s}\left(b_0 + 2\sum_{n>0} b_n \cos n\left(\frac{\pi}{2}-\phi_s\right)\right) \\
&= \frac{-2i}{\pi\sigma\tau_s}\begin{pmatrix} b_0 + 2\sum_{n>0} b_{2n}(-1)^n \cos(2n\phi_s) \\ +2\sum_{n>0} b_{2n+1}(-1)^n \sin((2n+1)\phi_s) \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.4.3}
$$

$$
\begin{aligned}
f_s^- &= \delta_s^0 - \frac{2i}{\pi\sigma\tau_s}\sum_n e^{in\frac{\pi}{2}} e^{in\phi_s} b_n \\
&= \delta_s^0 - \frac{2i}{\pi\sigma\tau_s}\left(b_0 + \sum_{n>0} b_n (e^{in\left(\frac{\pi}{2}+\phi_s\right)} + e^{-in\left(\frac{\pi}{2}+\phi_s\right)}) \right) \\
&= \delta_s^0 - \frac{2i}{\pi\sigma\tau_s}\left(b_0 + 2\sum_{n>0} b_n \cos n\left(\frac{\pi}{2}+\phi_s\right)\right) \\
&= \frac{-2i}{\pi\sigma\tau_s}\begin{pmatrix} b_0 + 2\sum_{n>0} b_{2n}(-1)^n \cos(2n\phi_s) \\ -2\sum_{n>0} b_{2n+1}(-1)^n \sin((2n+1)\phi_s) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.4.4}
$$

Маючи таке представлення, можна зробити висновок щодо виконання наступних тотожностей

$$
f_s^+ = f_{-s}^+, \qquad f_s^- = f_{-s}^- \tag{3.4.5}
$$

При даній симетрії рівняння (3.1.15) приймає наступний вигляд:

$$
x_m + \frac{S_m(kp)V_m J_0(ka)}{F_m J_m(ka)} x_0 + \sum_{n>0} \frac{\left[S_{n-m}(kp) + S_{n+m}(kp)\right] V_m J_n(ka)}{F_m J_m(ka)} x_n = \frac{(-1)^m V_m}{F_m J_m(ka)} \tag{3.4.6}
$$

Дане перетворення корисно для прискорення часу рахунки, але для того, щоб розділити рівняння на парну і непарну частину, необхідно застосувати до нього умова симетричності або антисиметричність щодо осі X Рис. 3.6 або одне з наступних умов $U(r,-\varphi)=\pm U(r,\varphi)$ чи $U(x,-y)=\pm U(x,y)$. Тоді

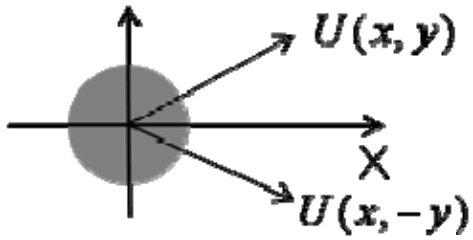


Рис. 3.6 Симетрія відносно осі X

$$U(r,-\varphi)=\sum_s\sum_n b_n H_n^{(1)}(kr_s)e^{-in\varphi_s}= \\ \sum_s\sum_n b_{-n}H_{-n}^{(1)}(kr_s)e^{in\varphi_s}=\sum_s\sum_n b_{-n}(-1)^n H_n^{(1)}(kr_s)e^{in\varphi_s} \tag{3.4.7}$$

Для парної симетрії $U(r,-\varphi)=U(r,\varphi)$ умова $b_n=(-1)^n b_{-n}$ призводить до того

$$b_{2n+1}=0\text{, якщо } U(x,y)=U(-x,y)=U(x,-y) \tag{3.4.8}$$

Тоді головна система рівнянь спрощується до наступного виду

$$x_m+\frac{S_{2m}(\kappa\xi)V_{2m}(\kappa)J_0(\kappa)}{F_{2m}(\kappa)J_{2m}(\kappa)}x_0 \\ +\sum_{n>0}\frac{\left[S_{2n-2m}(\kappa\xi)+S_{2n+2m}(\kappa\xi)\right]V_{2m}(\kappa)J_{2n}(\kappa)}{F_{2m}(\kappa)J_{2m}(\kappa)}x_n=\frac{V_{2m}(\kappa)}{F_{2m}(\kappa)J_{2m}(\kappa)}, \tag{3.4.9}$$

а гармоніки Флоке приймають такий вид:

$$f_s^+=\frac{-2i}{\pi\sigma\tau_s}\left(b_0+2\sum_{n>0}b_{2n}(-1)^n\cos(2n\phi_s)\right), \tag{3.4.10}$$

$$f_s^- = \frac{-2i}{\pi\sigma\tau_s}\left(b_0 + 2\sum_{n>0} b_{2n}(-1)^n \cos(2n\phi_s)\right). \tag{3.4.11}$$

У антисиметричному випадку $U(r,-\varphi) = -U(r,\varphi)$ умова на коефіцієнти розкладання мають такий вигляд $b_n = (-1)^{n+1} b_{-n}$ або,

$$b_{2n} = 0, \text{ якщо } U(x,y) = U(-x,y) = -U(x,-y) \tag{3.4.12}$$

В даному випадку рівняння (3.4.6) має вигляд

$$x_m + \sum_{n>0} \frac{\left[S_{2n-2m}(\kappa\xi) + S_{2n+2m+2}(\kappa\xi)\right] V_{2m+1}(\kappa) J_{2n+1}(\kappa)}{F_{2m+1}(\kappa) J_{2m+1}(\kappa)} x_n = -\frac{V_{2m+1}(\kappa)}{F_{2m+1}(\kappa) J_{2m+1}(\kappa)}, \tag{3.4.13}$$

а гармоніки Флоке приймають такий вигляд

$$f_s^+ = \frac{-4i}{\pi\sigma\tau_s}\sum_{n>0} b_{2n+1}(-1)^n \sin((2n+1)\phi_s) \tag{3.4.14}$$

$$f_s^- = \frac{4i}{\pi\sigma\tau_s}\sum_{n>0} b_{2n+1}(-1)^n \sin((2n+1)\phi_s) \tag{3.4.15}$$

3.5 Результати чисельного розрахунку модових частот та порогів самозбудження

Розглянемо решітку з відносно невеликим показником заломлення $\alpha = 1.4142$ і будемо вивчати задачу розсіювання, наприклад, відшукуючи залежності коефіцієнта відбиття від нормалізованої частоти σ і значення відносної відстані між нитками $\xi = p/a$. Рельєф такої залежності для Е-поляризації зображений на Рис. 3.7 (а), де нормована частота змінюється в межах $\sigma = 0.1$ та $\sigma = 1.9999$ (Нагадаємо, що при $\sigma = 1.0$ елементи матриці стає сингулярними). Значення періоду структури змінюється від $p = 2.1a$, що відповідає випадку щільного заповнення решітки, до $p = 8a$, коли решітка є досить розріджена. Яскраві хребти є областями високого відбивання, викликаними резонансами, пов'язаними з власними модами. Слід зауважити, що моди однієї нитки, збудженні зв'язком з іншими нитками, існують і в нескінченній решітці. На рельєфі коефіцієнта відображення вони чітко видно при

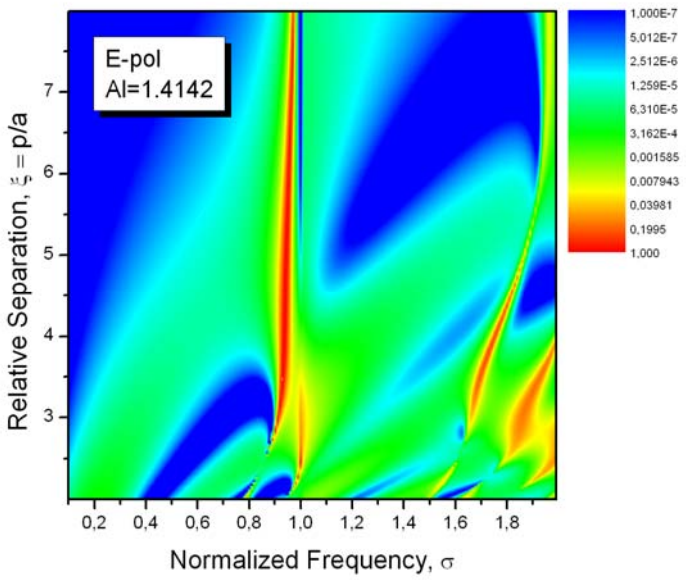
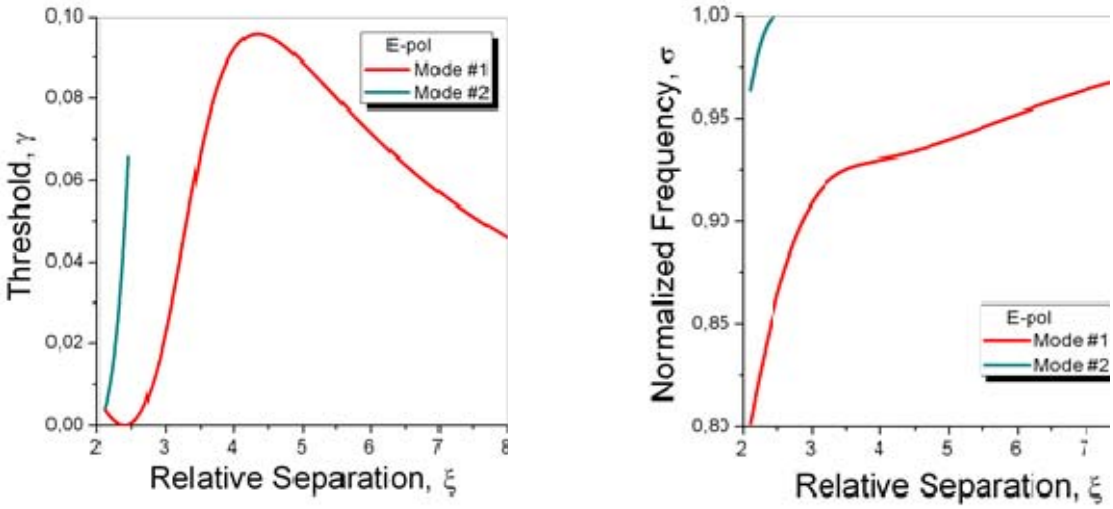


Рис. 3.7 *E*-поляризація: рельєф коефіцієнта відбиття для решітки з дієлектричних ниток з $\alpha = 1.4142$ в залежності від нормованної частоти σ і відносної відстані ξ.



(а) (б)

Рис. 3.8 *E*-поляризація: пороги самозбудження (а) і власні частоти (б) для перших двох мод решітки з квантових ниток з $\alpha = 1.4142$ в залежності від відносної відстані ξ.

великих значеннях періоду, коли взаємодія ниток мінімальна. Такі резонанси характерні тим, що представляють собою похило розташовані пологі хребти. Вузькі яскраві хребти, які лягають на вертикальні лінії, відповідні цілим значенням нормованої частоти $\sigma = 1, 2, ...$ (особливості граткових сум), є резонансами на так званих граткових модах.

Саме граткові резонанси і відповідні їм моди є основним об'єктом інтересу даної роботи. Ми досліджували відповідні першим двом резонансам (видимим при $0 < \sigma < 1$ на Рис. 3.7) граткових моди в лазерної постановці. На Рис. 3.8 представлені відповідні їм залежності порогів самозбудження (а) і власних частот (б) від відносної відстані ξ. Якщо порівняти власні частоти і лінії резонансів на Рис. 3.7, то видно, що вони практично повністю збігаються. Це підтверджує правильність інтерпретації резонансів. Найбільш цікавим є поведінка порогів самозбудження граткових мод. Можна побачити, що після того, як ця величина досягає максимуму значення для $\xi \approx 4.5$, вона монотонно прямує до нуля для великих значень ξ. Це є наслідком вихідного припущення, що решітка нескінченна.

Власні значення обчислюються ітераційним методом (методом Ньютона), використовуючи в якості початкового наближення пару чисел, де власна частота вибирається рівною резонансній частоті в задачі розсіювання, а поріг випромінювання вибирається у вигляді довільного малого числа.

Результати подібного дослідження для H-поляризації представлені на Рис. 3.9 та 3.10. Тут на рельєфі коефіцієнта відображення (Рис. 3.9 (а)) можна побачити резонанси на власних модах однієї нитки (їх пологі хребти подібні для обох поляризацій див. Рис. 3.7). Резонанси на граткових модах, хоча і мають схожу поведінку, мають більшу контрастність (вони тонше, ніж в *E*-поляризації, і максимальні значення коефіцієнта відображення ближче до 1). Граткові резонанси для $0<\sigma<1$ пропадають з поля зору при значних $\xi>6$ через те, що ширина резонансу ставати тонше розрахункової сітки при побудови даного рельєфу.

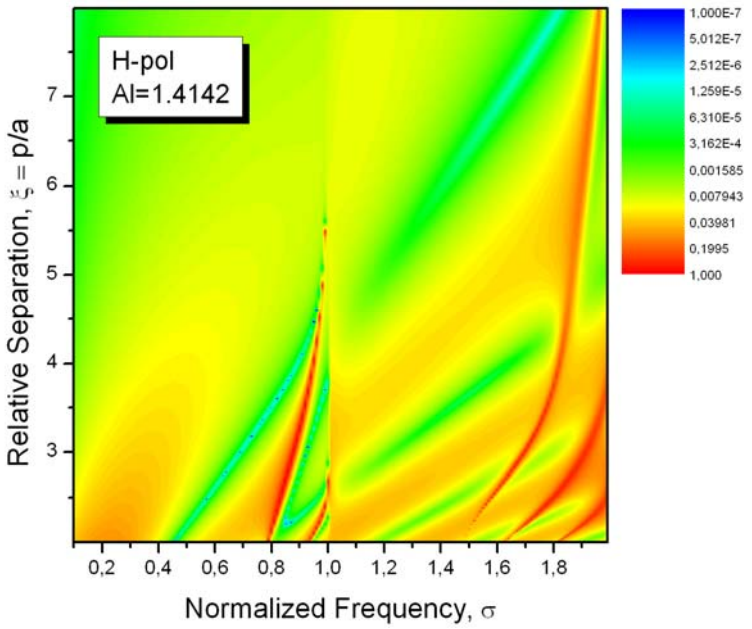
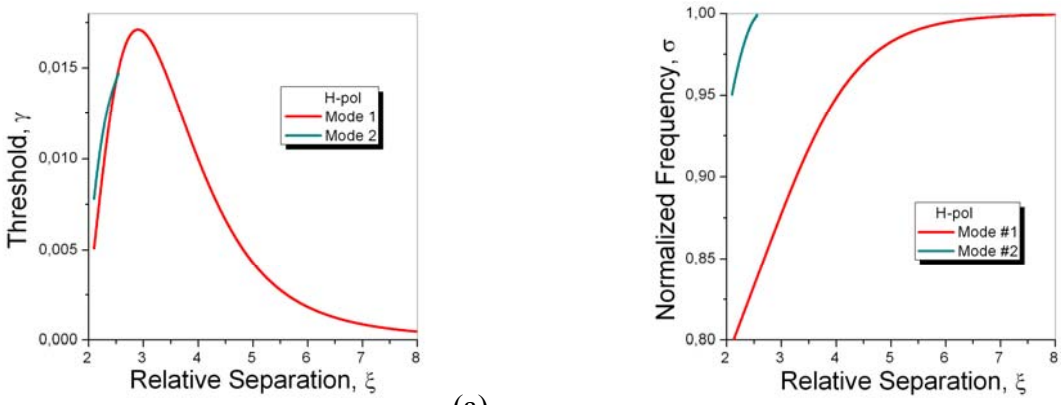


Рис. 3.9 *H*-поляризація: рельєф коефіцієнта відбиття для решітки з діелектричних ниток з $\alpha=1.4142$ в залежності від нормованної частоти σ і відносної відстані ξ.



(а) (б)

Рис. 3.10 (а) *H*-поляризація: пороги самозбудження (а) і власні частоти (б) для перших двох мод решітки з квантових ниток з $\alpha = 1.4142$ в залежності від відносної відстані ξ.

Хоча основний інтерес представляють залежності характеристик граткових мод від періоду структури, ми розглянемо, для повноти дослідження, залежність цих величин від показника заломлення діелектричних ниток в решітці.

Рельєф коефіцієнта відбиття нормально падаючої плоскої хвилі від решітки з діелектричних ниток як функція нормованої частоти і коефіцієнта заломлення α представлений на Рiс.3.11. Резонанси на власних модах ниток найбільш яскраво проявляються для великих значень показника заломлення α, а резонанси на граткових модах добре видно при всіх α. Значення параметра $\xi = 2.1$ ($p = 2.1a$) для рельєфу на Рис. 3.11 (а) означає, що нитки розташовані досить щільно (відстань між ними дорівнює 0.1 радіуса), в цьому випадку на рельєфі для $\alpha > 3.5$ можна побачити синусоїдальні горби характерні для резонансів на модах однієї нитки.

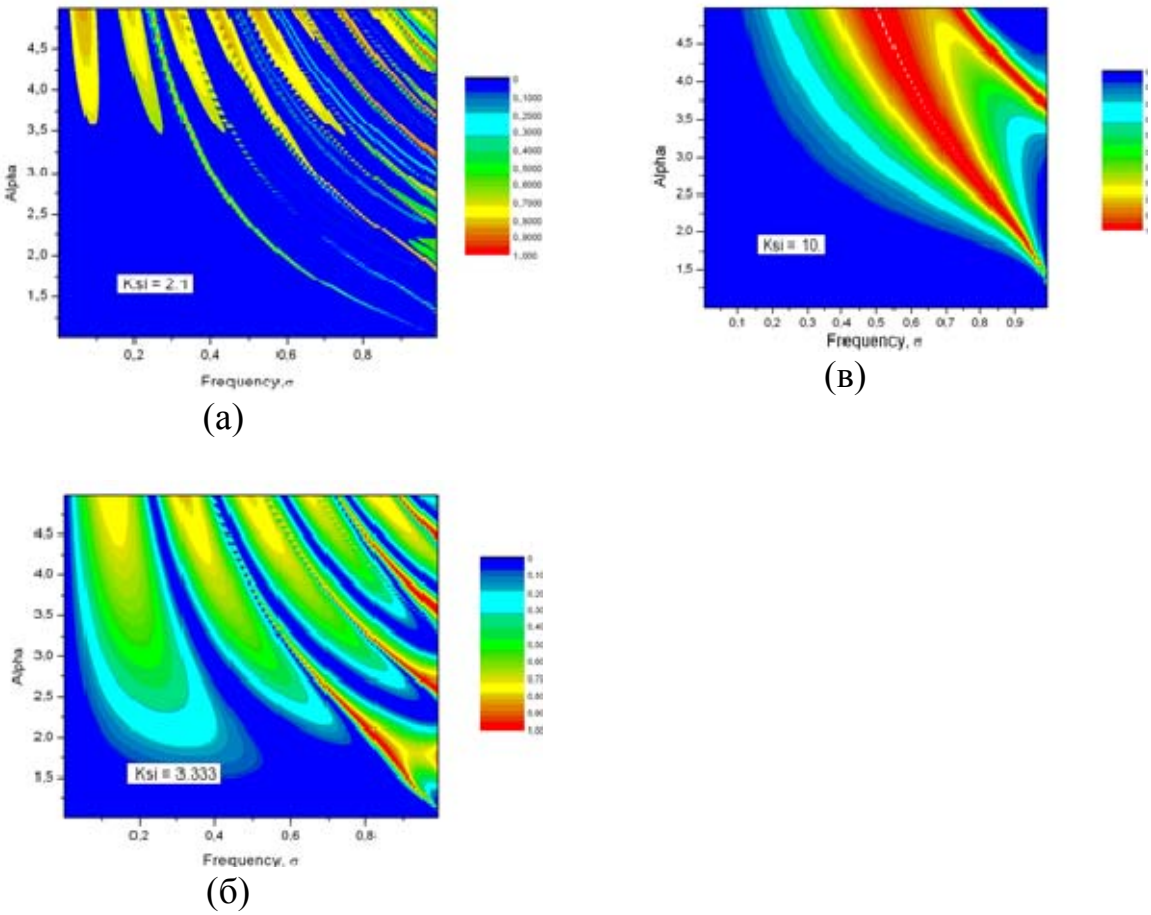
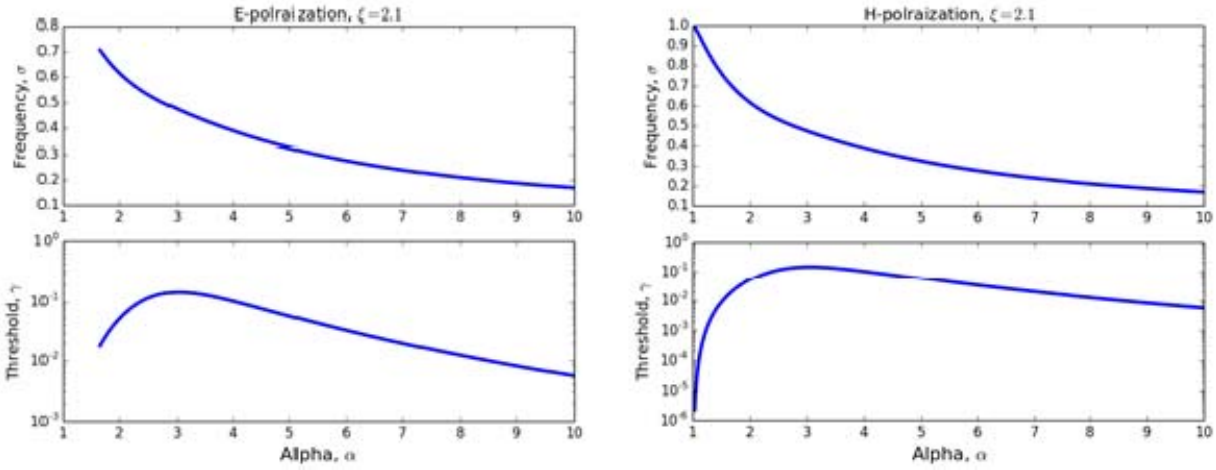


Рис. 3.11 Н-поляризація. Рельеф коефіцієнта відбиття для решітки з діелектричних ниток з періодами $\xi = 2.1$ (а), $\xi = 3.3333$ (б), $\xi = 10$ (в), що залежить від показника заломлення і нормованої частоти. σ.

Варто відзначити, що ці хребти перестають бути помітними для значень $\alpha < 2.5$. Крім цього, можна побачити серію більш тонких хребтів, вони мають приблизно однакову товщину для різних значень α. Більш ясна картина представлена на Рис. 3.11 (б), де відношення періоду до радіусу $\xi = 3.3333$, де чітко видно обидва типи резонансів. Для ще більшого значення ми $\xi = 10$ бачимо тільки резонанси на граткових модах.

Результати дослідження лазерної завдання в двох поляризаціях представлені на Рис. 3.12. На обох графіках видно, що поріг випромінювання зменшується як при збільшенні показника заломлення α, так і при наближенні його до значення, рівного 1. Якщо перший випадок не викликає сумніву, то другий буде далі перевірений за допомогою знаходження асимптотичних наближень.



(а) (б)

Рис. 3.12 *H*-поляризація (а). *E*-поляризація (б) Власні частоти та пороги самозбудження граткових мод решітки з квантових ниток з $\xi = 2.1$, в залежності від показника заломлення α.

Розглянемо відмінності у властивостях граткових мод в залежності від сімейства симетрії, до якого вони належать. На Рис. 3.7 і 3.9 можна спостерігати, що для малих значень $\xi < 3$ можна спостерігати кілька граткових резонансів при $0 < \sigma < 1$. Для зручності розглянемо два чітко виражених резонансу на частотах $\sigma = 0.8256$ і $\sigma = 0.98365$. Для обох точок були побудовані ближні поля в завданні розсіювання плоскої хвилі. Були

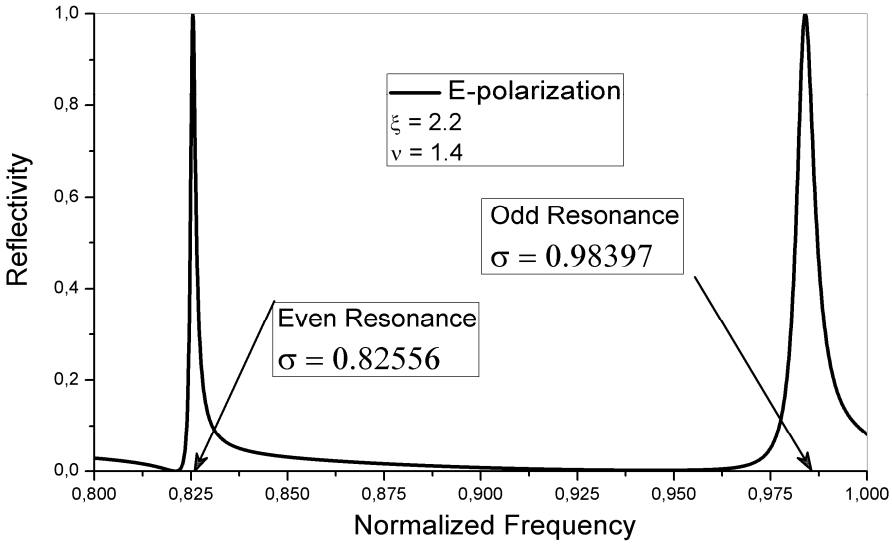


Рис 3.13. Коефіцієнт відбиття нормально падаючої *E*-поляризованої плоскої хвилі від решітки з $\xi = 2.2$ і $\alpha = 1.4$.

також знайдені лазерні власні значення і побудовані відповідні власні поля, в тому ж масштабі для зручності порівняння. Так як поля комплексно значною, то була використана методика відображення комплекснозначних функцій, описана в [121]. Для першого резонансу на Рiс.3.13 при $\sigma = 0.8256$ ми бачимо, що поле має максимальне значення на кожній нитці і між ними. Власне поле цієї ж моди показано на панелі (в) для власного значення ($\sigma = 0.8124025572$, $\gamma = 0.00700583$). Можна бачити яскраво виражену симетричну картину щодо площині решітка, тобто парність поля щодо осі *X*.

Наступний резонанс в задачі розсіювання спостерігається на частоті $\sigma = 0.98365$, поле в ближній зоні для нього побудовано на Рис 3.14 (в). Тут

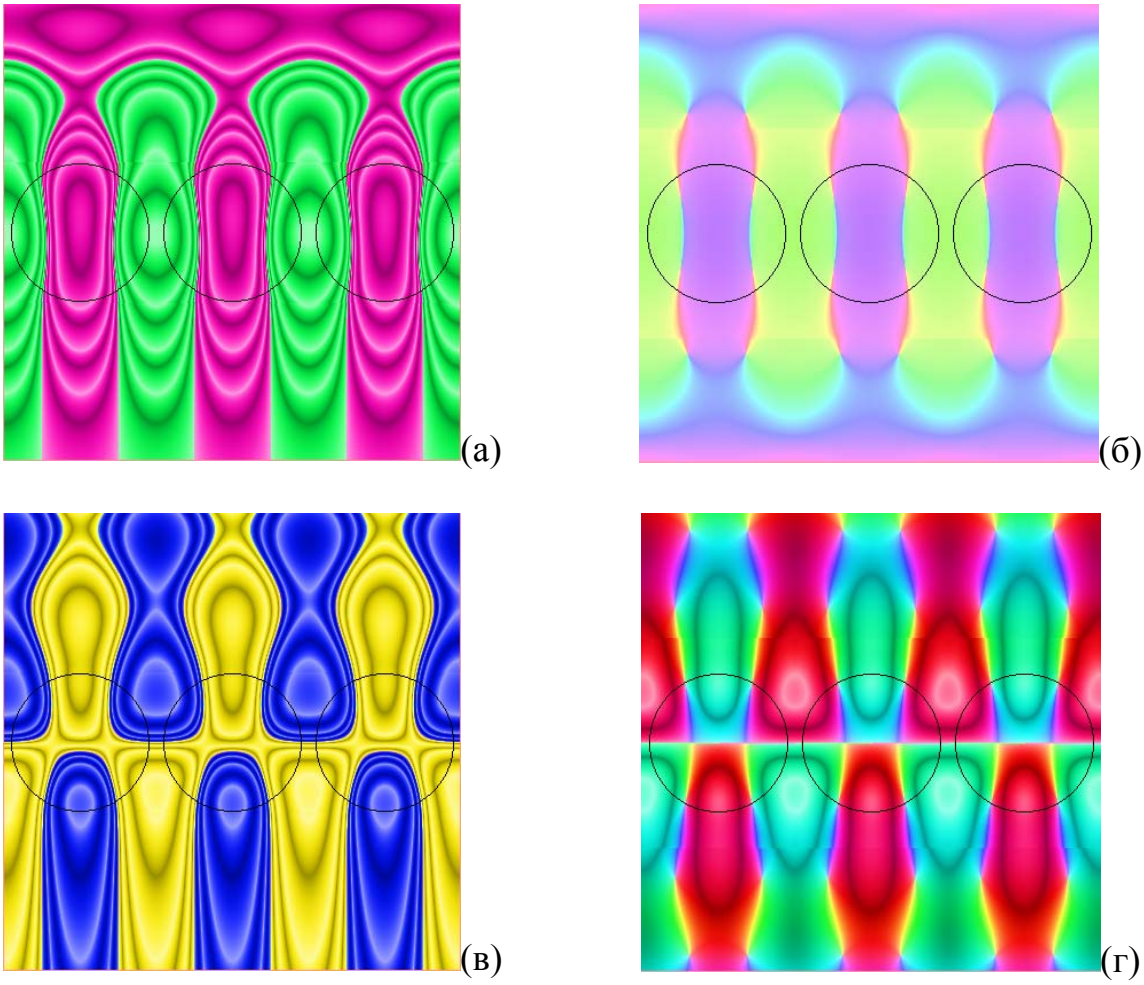


Рис 3.14. Ближнє поле в резонансі на парній моді на частоті $\sigma = 0.8256$ (а) і відповідне власне поле (б). Ближнє поле в резонансі на непарній моди на частоті $\sigma = 0.98365$ (в) і відповідне власне поле (г) для решітки з $\xi = 2.2$ і $\alpha = 1.4$. *E*-поляризація

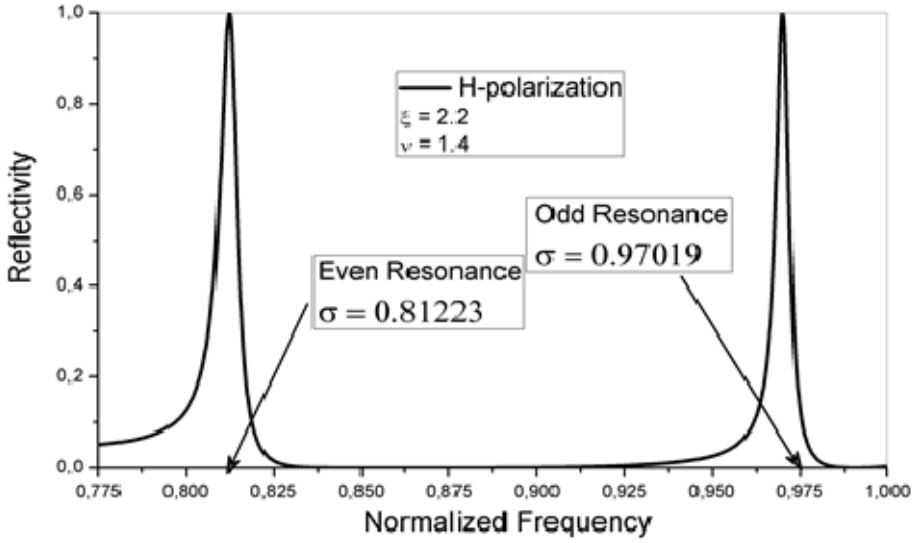


Рис 3.15. Коефіцієнт відбиття нормально падаючої H -поляризованої плоскої хвилі від решітки з $\xi = 2.2$ і

ми спостерігаємо іншу структуру поля, яка більш чітко видно на портреті власного поля (г), побудованого для власного значення, ($\sigma = 0.980217$, $\gamma = 0.0001473365$). Тут ми бачимо антисиметричного картину щодо площини решітки, тобто непарність поля даної моди щодо осі *X*.

Рис. 3.15 демонструє залежність коефіцієнта відбиття плоскої нормально падаючої хвилі в *H*-полярізаціі від решітки з показником заломлення $\alpha = 1.4$ і періодом $\xi = 2.2$ в залежності від нормованної частоти на ділянці $0.775 < \sigma < 1$. Як і для *E*-полярізаціі, ми спостерігаємо два граткових резонанса. Перший на частоті $\sigma = 0.81223$ відповідає парной моді і другий на $\sigma = 0.97019$ - непарній моді. На Рис. 3.16 показані повне поле на частоті $\sigma = 0.81223$ (а) і $\sigma = 0.97019$ (б) і поле ціх ж мод для відповідних власних значень ($\sigma = 0.8124025572$, $\gamma = 0.00700583$) (в) і ($\sigma = 0.970122657$, $\gamma = 0.00880652$) (г).

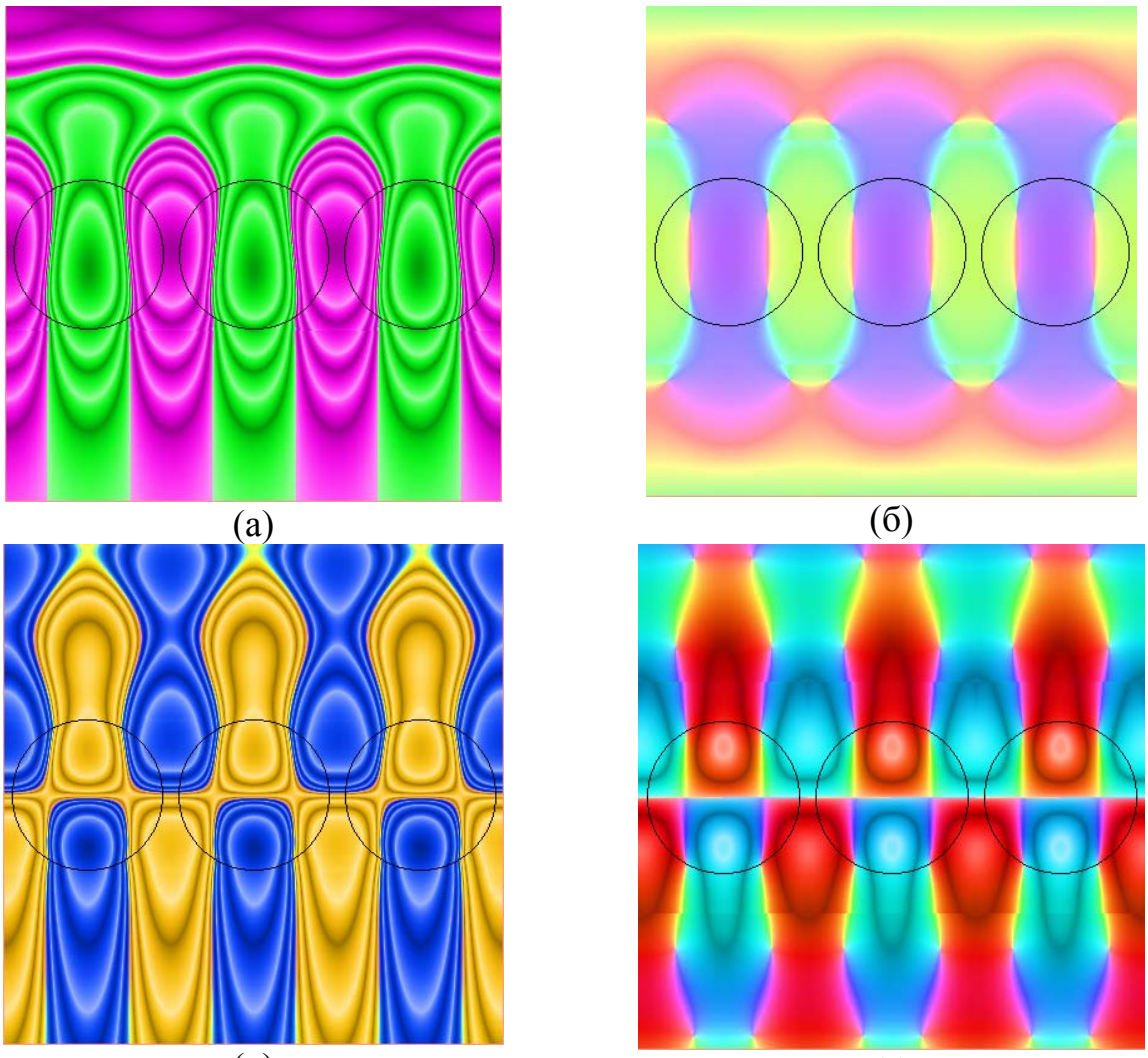


Рис 3.16. Ближнє поле в резонансі на парній моді на частоті $\sigma = 0.81223$ (а) і відповідне власне поле (б). Ближнє поле в резонансі на непарній моди на частоті $\sigma = 0.97019$ (в) і відповідне власне поле (г) для решітки з $\xi = 2.2$ і $\alpha = 1.4$. *H*-поляризація

На Рис. 3.14 та 3.16 і далі використовується специфічний метод відображення комплекснозначних функцій [126]. У цьому методі аргумент комплексного числа представляється за допомогою кольору (Рис. 3.17), а модуль значення переходом від темного відтінку до світлого. При чому безперервність інтенсивності кольору відбувається при значеннях модуля $|z| = 2^n$, для всіх цілих значень *n*.

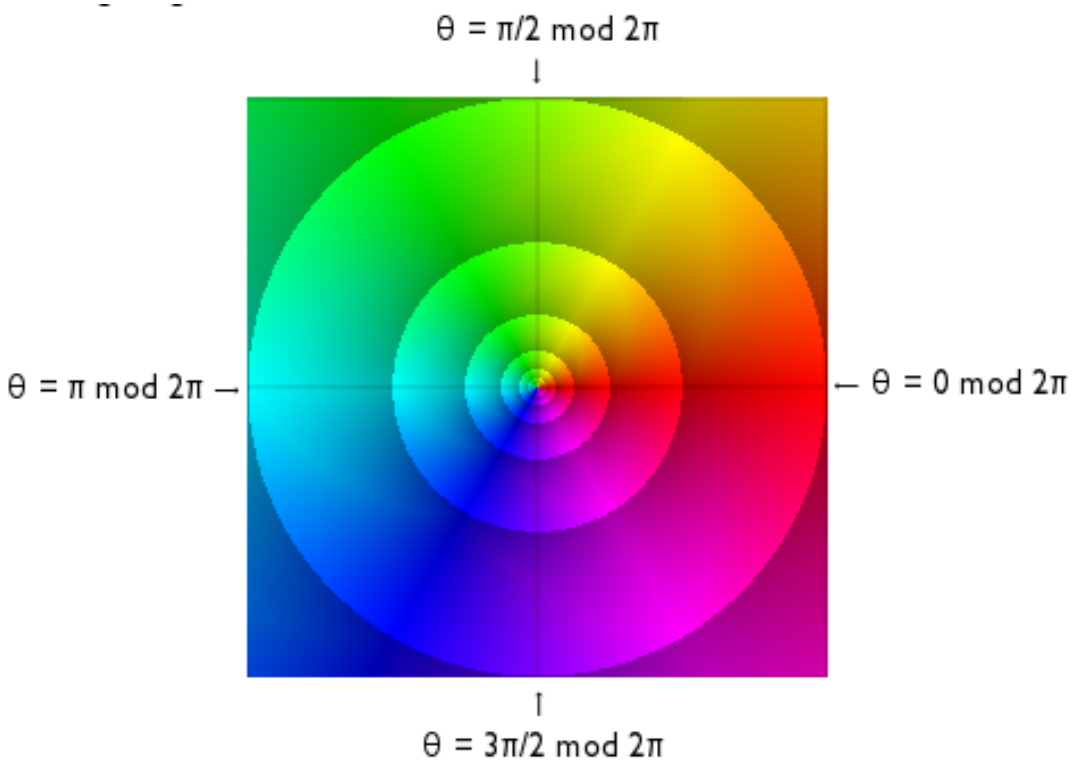


Рис. 3.17 Представлення комлекснозначной функції $f(z) = z$ в одиничному квадраті початку координат комплексної площині за допомогою методу відображення комлексних функцій.

Як було згадано вище, найбільш цікавим є поведінка подібних резонансів для випадку решітки з малим взаємодією між нитками (або, іншими словами, великим значенням періоду в порівнянні з радіусом нитки). Така поведінка була вперше досліджено в роботах [81, 82]. Тут для *H*-полярізаціі було досліджено відображення плоскої хвилі від решітки з ниток з показником заломлення $\alpha = 2.48$, для значень відносного відстані між нитками $\xi \le 10$. Були проведені теоретичні розрахунки, в яких враховувалися тільки члени рядів Фур'є з індексами 0 і ± 1 (дипольне наближення). Згодом був проведений експеримент, який підтвердив отримані дані. Розглянемо результати детального дослідження такої задачі для *H*-поляризації.

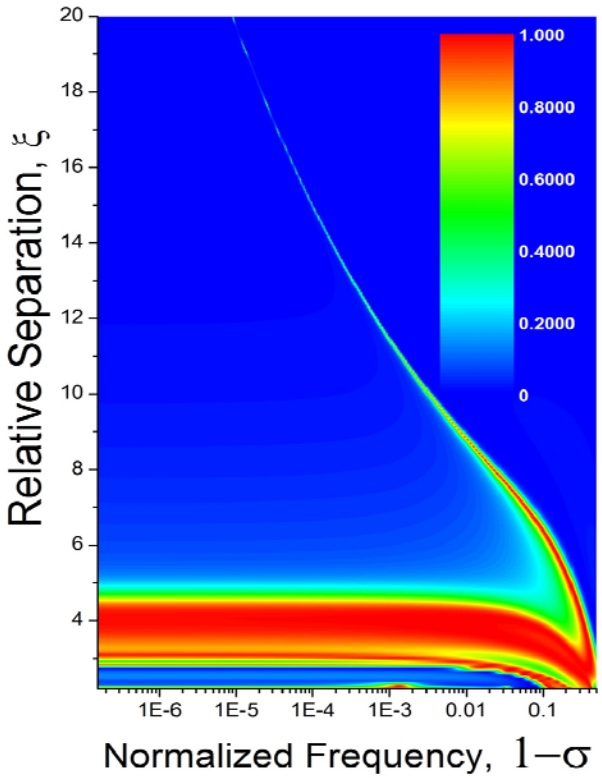
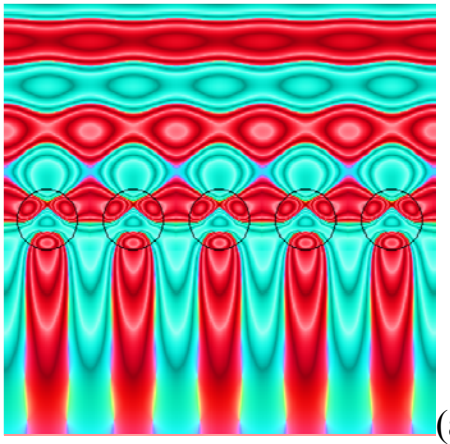


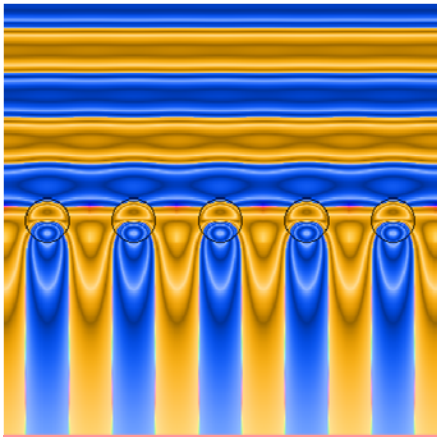
Рис 3.18. Рельєф коефіцієнт відбиття нормально падаючої *H*-поляризованої хвилі від решітки з $\alpha = 2.46$, в залежності від нормованої частоти σ (в логарифмічному масштабі від величини $1-\sigma$) і відношення періоду до радіусу нитки у решітки $\xi = 2.2\ldots20$.

Рис. 3.5.18 показує рельєф коефіцієнта відбиття плоскої хвилі в залежності від нормованої частоти σ і відносної відстані ξ, на якому можна бачити резонанси на декількох модах, частоти яких прагнуть до значення $1-\sigma$. Для наочності рельєф на Рiс.3.18 має логарифмічну шкалу щодо величини $1-\sigma$. Досліджуємо більш детально найцікавішу моду, резонанс якої спостерігається і при великих значеннях періоду, $\xi > 5$. На Рис 3.19 показані ближні поля в резонансі на цій моді для різних значень відносної відстані ξ. Надалі буде показано, що моди, резонанси на яких видно в нижній частині рельєфу, є модами вищого порядку.



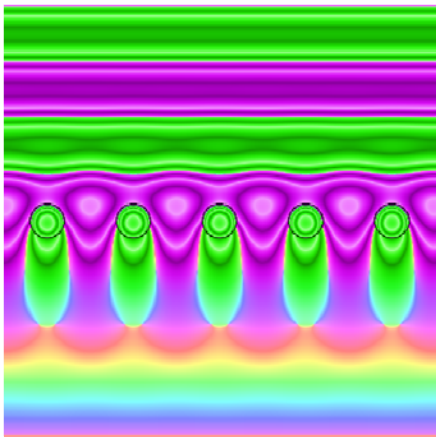
(а)

$\xi = 2.8 \quad \sigma = 0.9738267$



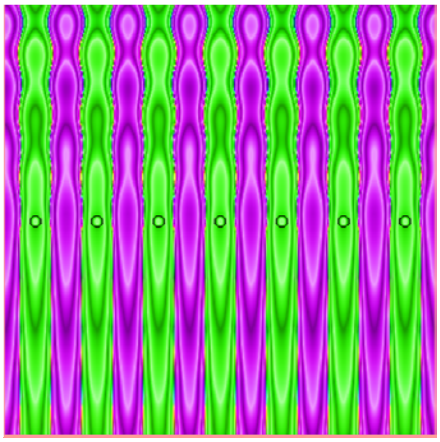
(б)

$\xi = 4 \quad \sigma = 0.960324$



(в)

$\xi = 5 \quad \sigma = 0.776658$



(г)

$\xi = 10 \quad \sigma = 0.9967$

Рис 3.19. Ближні поля при резонансному розсіянні плоскої хвилі на решітці з діелектричних ниток з показником заломлення $\alpha = 2.46$ для різних значень ξ і σ.

Ближні поля граткової моди зображені на Рис. 3.19 (в) і (г), яка проходить по діагоналі через весь рельєф на Рис. 3.18. Як можна бачити, зі збільшенням відносної відстані ξ нормована резонансна частота дуже швидко прагне к $\sigma = 1$. Слід зауважити, що ширина резонансу теж зменшується з великою швидкістю. Ближне поле в такому резонансі для $\xi = 5$ зображено на Рис. 3.19 (в). Тут видно, що поле концентрується в центрах ниток і між ними. Для випадку $\xi = 10$ на Рис. 3.19 (г) спостерігається більш чітко виражена картина стоячої хвилі вздовж площини решітки.

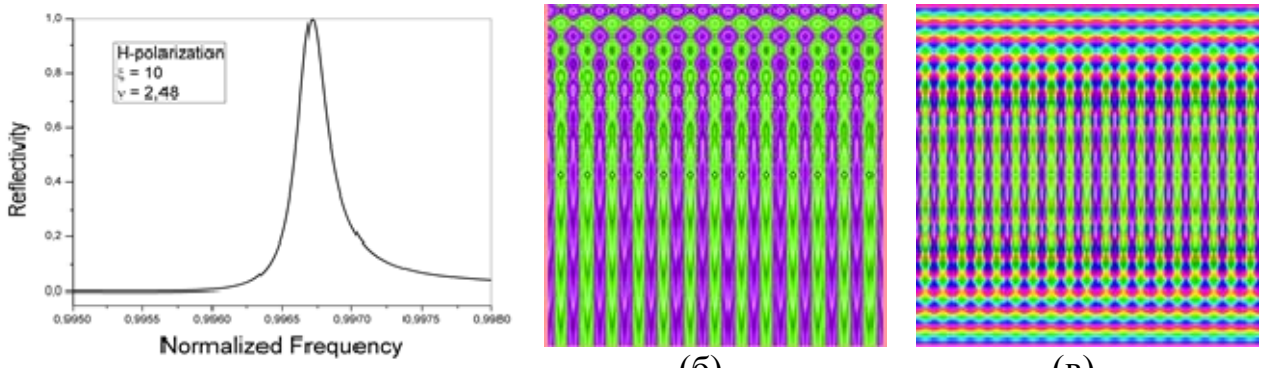
У нижній півплощині можна бачити, що резонансне поле мало по амплітуді, але його поведінка зберігається, а у верхній півплощині

s	f_s^+	f_s^-
-6	-0.05138256 +4.34636288e+00j	-5.41671000e-02 +4.42070145e+00j
-5	-0.04359830 +3.69994671e+00j	-4.63882426e-02 +3.77442936e+00j
-4	-0.03613537 +3.08019212e+00j	-3.89297255e-02 +3.15479268e+00j
-3	-0.02936572 +2.51799501e+00j	-3.21635143e-02 +2.59268730e+00j
-2	-0.02478582 +2.13765279e+00j	-2.75860673e-02 +2.21241061e+00j
-1	4.79985399 +3.98759832e+02j	-4.80265571e+00 +3.98834629e+02j
0	-0.99845397 -4.94427173e-02j	-1.25618170e-03 +2.53675299e-02j
1	-4.79985399 +3.98759832e+02j	-4.80265571e+00 +3.98834629e+02j
2	-0.02478582 +2.13765279e+00j	-2.75860673e-02 +2.21241061e+00j
3	-0.02936572 +2.51799501e+00j	-3.21635143e-02 +2.59268730e+00j
4	-0.03613537 +3.08019212e+00j	-3.89297255e-02 +3.15479268e+00j
5	-0.04359830 +3.69994671e+00j	-4.63882426e-02 +3.77442936e+00j
6	-0.05138256 +4.34636288e+00j	-5.41671000e-02 +4.42070145e+00j

Таб. 3.2 Амплітуди гармонік Флоке для решітки з діелектричних ниток з $\alpha = 2.46$ і $\xi = 20$ для нормованої частоти $\sigma = 0.9999908$.

спостерігається більш складна структура з огляду на взаємодії з падаючим полем. Формування ближнього поля подібним чином обумовлено структурою зовнішнього поля. Її дуже важко проаналізувати, використовуючи розкладання по функціях Бесселя (3.1.2-3.1.3), тому розглянемо розкладання по рядах Фур'є (3.3.6-3.3.9). Для $0 < \sigma < 1$ ми маємо $R = \left|f_0^+\right|^2$, а з того, що ми спостерігаємо повне відображення, випливає $R = 1 - 0$, і отже, $\left|f_0^\pm\right| = 1 - 0$.

Це підтверджується розглядом амплітуд гармонік Флоке - см. Таб. 3.2: в даному випадку $\left|f_0^+\right| \approx 1$ і $\left|f_0^-\right| \approx 0$, що відповідає повному відображенню, хоча основний внесок в стоячу хвилю дають гармоніки Флоке першого порядку, $f_{\pm 1}^\pm$. При цьому слід зазначити, що значення їх амплітуд не обмежені законом збереження енергії, так як відповідні гармоніки зменшуються в нормальному напрямку до площини решітки ($\tau_1^2 < 0$). Повертаючись до подання поля в (3.3.6) - (3.3.9), ми маємо



(а) (б) (в)

Рис. 3.20. Коефіцієнт відбиття *H*-поляризованої хвилі від решітки з ниток з $\alpha = 2.46$, $\xi = 10$ (а). Ближнє поле на частоті $\sigma = 0.99671217$ (б) і власне поле для $\sigma = 0.99685$ і $\gamma = 0.0152854$ (в).

$$U(x, y) \approx 2 f_1^+ e^{ik\tau_1 y} \cos(k\pi_1 x). \qquad (3.5.1)$$

Для аналітичного подання розсіяного поля можна ввести малу величину,

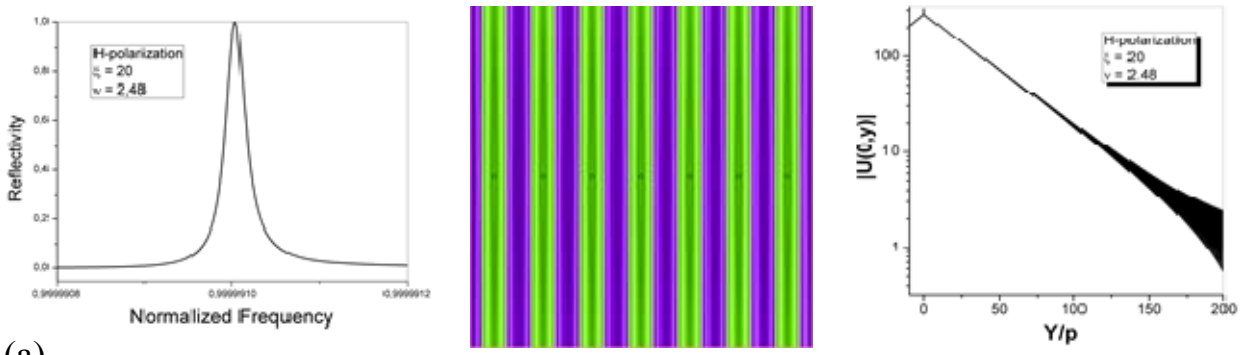
$$\delta = 2\pi(\nu - 1)/\xi^2 << 1, \qquad (3.5.2)$$

тоді ширина просторової смуги високої інтенсивності розсіяного поля характеризується величиною

$$|y|/p \approx (2\pi\delta)^{-1} \ln(1/\delta) \qquad (3.5.3)$$

Розглянемо більш детально випадок $\xi = 10$ (Рис 3.20). Коефіцієнт відбиття, показаний на Рис. 3.20 (а), демонструє резонанс, що лежить в відрізку $0.9965 < \sigma < 0.997$. Повний поле при падінні плоскої хвилі зверху зображено на Рис. 3.20 (б) (ті ж параметри що і на Рис.3.19 (б)). Даний малюнок можна розділити на 3 області.

Перша область, що лежить вище області решітки, обумовлена інтерференцією нульовий гармоніки Флоке $f_0^+ e^{-iky}$ і падаючого поля. Друга

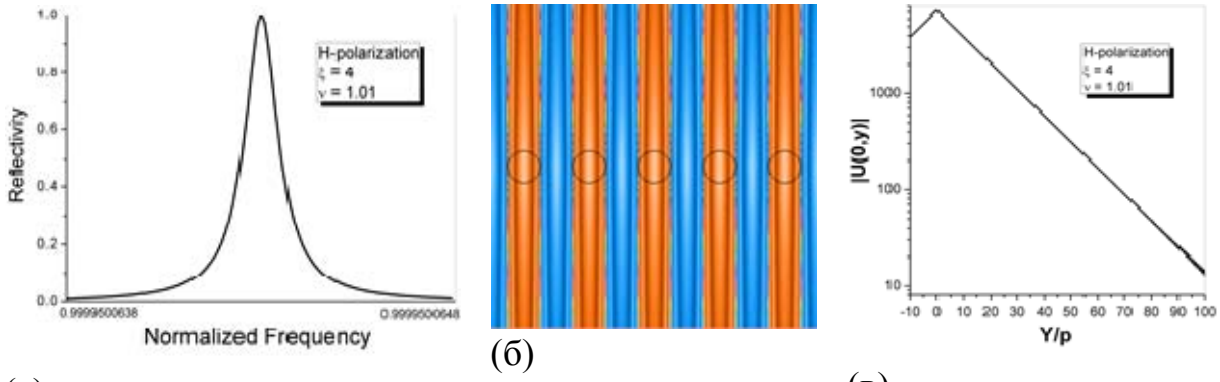


(а) (б) (в)

Рис. 3.21. Коефіцієнт відбиття *H*-поляризованої хвилі від решітки з ниток з $\alpha = 2.46$, $\xi = 20$ (а). Ближнє поле на частоті $\sigma = 0.9999908$ (б) і і зріз цього поля уздовж осі Y (в).

область - це смуга уздовж решітки шириною,в якій характеризується виразом (3.5.1). Нижче цієї області знаходиться зона тіні, в яку падаюча хвиля на даній частоті не проходить.

На Рис. 3.20 (в) зображено власне поле (19 періодів) для відповідної решітки з квантових ниток для власного значення($\sigma = 0.99685$, $\gamma = 0.0152854$). Тут видно, що ширина області, яка займається стоячою хвилею, приблизно така ж, як у відповідній задачі розсіювання. Природа граткових резонансів більш яскраво розкривається для більш розрідженій решітки при $\xi = 20$. Рiс.3.21 (а) показує, що гострота резонансу така, що для його знаходження необхідний крок менше $1.e-6$. Блажен поле в цьому резонансі на 7 періодах решітки на частоті $\sigma = 0.9999908$ представлено на Рис. 3.5.13 (б). Тут чітко видно природа ближнього поля в гратковому резонансі: максимуми по абсолютній величині поля знаходяться в центрах ниток і в точках, що лежать точно посередині між ними, їх фази протилежні. Слід зазначити, що власне поле для лазерного власного значення ($\sigma = 0.99999100319321088$, $\gamma = 0.00082901040387194677$) в даному масштабі виглядає абсолютно ідентично. Дальнє поле можна побачити на 3.21 (в), де зображений зріз поля уздовж осі *Y*. На ньому видно, що зона високої інтенсивності поля простягається від площини решітки на відстань до $Y = 200p$.



(а) (б) (в)

Рис. 3.22 *H*-поляризація: (а) коефіцієнт відбиття плоскої хвилі від решітки з періодом $\xi = 4$ і показником заломлення $\nu = 1.01$, (б) ближнє поле в резонансній частоті (5 періодів), і (в) зріз ближнього поля уздовж осі *Y*.

Ще одним цікавим випадком є резонанс вкрай високої добротності, що виникає при значення показника заломлення ниток, близького до одиниці $\alpha \approx 1$. Варто уточнити, так як решітка розглядається у вільному просторі з показником заломлення 1, то тут мається на увазі, що цей добротний резонанс виникає при дуже малому контрасті показників заломлення ниток решітки і навколишнього середовища. Рис 3.22 (а) демонструє коефіцієнт відображення нормально падаючої плоскої хвилі від діелектричної решітки з $\alpha = 1.01$ і $\xi = 4$, що знаходиться у вільному просторі. Тут можна бачити, що ширина резонансу знаходиться в десятому десятковому знаку ($0.99995000638 < \sigma < 0.99995000648$). Рис 3.22 (б, в) показує, що близьке і далеке поля в даному резонансі подібні до раніше представлених результатів.

3.6 Асимптотичне наближення і теорема пойнтінга

Вищенаведені результати показують присутність яскравих резонансів нескінченної решітки на довжині хвилі, близької до величини періоду структури. Для великих значень періоду зазначені резонанси стають ще більш гострими. У цьому підрозділі ставиться задача знайти аналітичне рішення детермінантного рівняння,

$$\det\left(I + A(\sigma,\gamma,\xi,\alpha)\right) = 0 \tag{3.6.1}$$

де матриця A є лівою частиною рівняння (3.1.12), (σ,γ) - власні значення, $\xi = p/a$ - відносна відстань між нитками (величина, по якій шукається асимптотика, $\xi \to \infty$) і α - коефіцієнт заломлення ниток в задачі розсіювання, і, одночасно, його матеріальна частина в лазерної задачі, $\nu = \alpha - i\gamma$.З огляду на те, що досліджується тільки симетричний випадок, можна спростити рівняння (3.6.1) і переписати цю матрицю наступним чином

$$A_{n,m} = \frac{S_{2m}(\kappa\xi)V_{2m}(\kappa)J_0(\kappa)}{F_{2m}(\kappa)J_{2m}(\kappa)} + \sum_{n>0}\frac{\left[S_{2n-2m}(\kappa\xi) + S_{2n+2m}(\kappa\xi)\right]V_{2m}(\kappa)J_{2n}(\kappa)}{F_{2m}(\kappa)J_{2m}(\kappa)} \tag{3.6.2}$$

Так як $\boldsymbol{A}$ задовольняє умовам теореми Гершгоріна [117], то всі власні значення лежать в околицях нулів діагональних елементів цієї матриці , або

$$1 + A_{m,m} = 0 \tag{3.6.3}$$

Коректність застосування теореми Гершгоріна [127] демонструє Рис. 3.6.1, де результати розрахунку власних значень для моди з Рис. 3.5.12

порівнюються з корінням рівняння (3.6.3) при $m = 0$. Слід зазначити, що значення відображаються в логарифмічному масштабі.

Розглянемо асимптотики функцій Бесселя і Ханкеля для малих значення аргументу,

$$J_m(t) \approx \frac{1}{m!}\left(\frac{t}{2}\right)^m - \frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{m+2} + O(t^{m+4}) \tag{3.6.4}$$

$$J'_m(t) \approx \frac{1}{2(m-1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{m-1} - \frac{m+2}{2(m+1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{m+1} + O(t^{m+3}) \tag{3.6.5}$$

$$H_m(t) \approx -\frac{i(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{t}\right)^m, \; m > 0 \tag{3.6.6}$$

$$H'_m(t) \approx \frac{im!}{2\pi}\left(\frac{2}{t}\right)^{m+1}, \qquad m > 0 \tag{3.6.7}$$

Тоді асимптотические наближення для функцій (3.1.10) - (3.1.13) при малих значення аргументу приймають такий вигляд:

$$V_m^E \approx \alpha^m \frac{\alpha^2 - 1}{(m+1)!m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+1} + O(t^{2m+3}) \tag{3.6.8}$$

$$V_m^H \approx \alpha^{m-2} \frac{1-\alpha^2}{2(m-1)!m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-1} + O(t^{2m+1}) \tag{3.6.9}$$

$$F_m^E \approx -i\frac{2\alpha^m}{\pi t} + O(t^{-3}) \tag{3.6.10}$$

$$F_m^H \approx -i\frac{\alpha^{m-2} + \alpha^m}{\pi t} + O(t^{-3}) \tag{3.6.11}$$

3.6.1 Асимптотичні наближення у *H*-поляріції

У підрозділі 3.5 детально досліджувалася перша граткова мода в *H*-полярізації при $\alpha = 2.46$. Знайдемо аналітичні вирази для її власної частоти і порога, а також для комплексної частоти і *Q*-фактора в завданні з пасивними

нитками. Ці вирази будуть порівняні з точним рішенням. Для всіх інших мод будуть отримані тільки аналогічні формули. Для знаходження асимптотичних наближень рішення рівняння (3.6.3) при, $m = 0$ перепишемо його в наступній формі,

$$1 + S_0(2\pi\sigma)\frac{V_0(2\pi\sigma/\xi)}{F_0(2\pi\sigma/\xi)} = 0, \tag{3.6.12}$$

де для H-полярізціі

$$\frac{V_0^H(t)}{F_0^H(t)} = \frac{1}{1 - \dfrac{32i}{\pi t^4\left(1-\nu^2\right)}}. \tag{3.6.13}$$

Граткову суму для $\sigma \in (1-\varepsilon..1)$ можна переписати таким чином:

$$S_0 \approx -1 + \frac{1}{\pi} - \frac{\sqrt{2}i}{\pi\sqrt{1-\sigma}}, \tag{3.6.14}$$

де точно виписана речова частина і взята головна частина уявної.

Використовуючи ці формули, можна отримати наступний вираз:

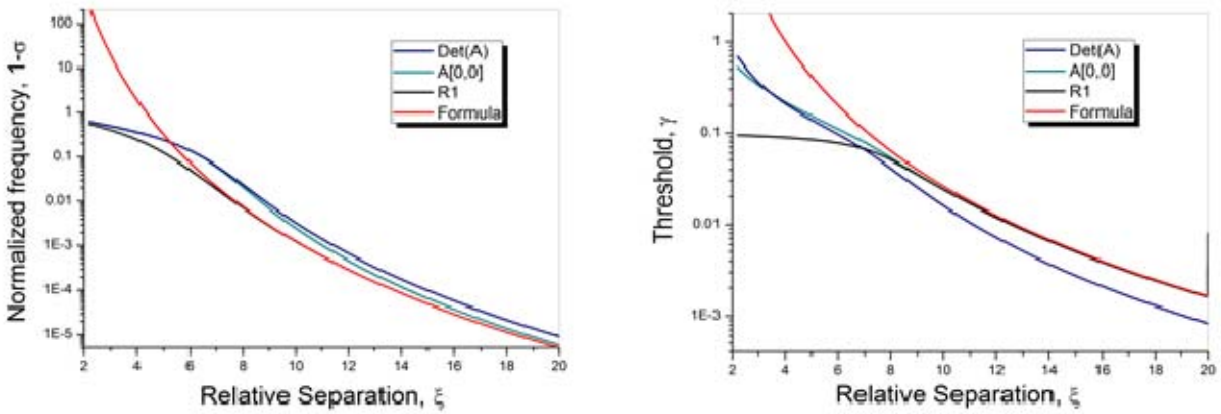
$$R_1 = 1 + \frac{1}{1 - \dfrac{32i}{\pi t^4\left(1-\nu^2\right)}}\left(-1 + \frac{1}{\pi} - \frac{\sqrt{2}i}{\pi\sqrt{1-\sigma}}\right). \tag{3.6.15}$$

Прирівнюючи його до нуля ($R_1 = 0$), і розглядаючи його дійсну і уявну частину і залишаючи тільки елементи нижчої ступенні, можна отримати наступні наближення для власних частот і порогів самозбудження:

$$\sigma \approx 1 - \frac{\pi^8 \left(\alpha^2 - 1\right)^2}{2\xi^8}, \tag{3.6.16}$$

$$\gamma \approx \frac{\pi^4 \left(1 - \alpha^2\right)^2 \left(\pi - 1\right)}{8\alpha\xi^4}. \tag{3.6.17}$$

Порівняння асимптотичних наближень (3.6.16) - (3.6.17), зображених червоними лініями, з наближеними, тобто з центрами кіл Гершгоріна або нулями діагональних елементів матриці (3.6.2) (зелені лінії), а також з країнами рівняння $R_1 = 0$ (чорні лінії), і з точними значеннями (сині лінії) представлені на Рис. 3.23.



(а) (б)

Рис. 3.23 Порівняння точних (синя лінія) і наближених значень для (а) нормованої частоти і (б) порога самозбудження.

Проводячи подібні маніпуляції, можна отримати і подібні наближення для комплексно значною частоти ($\sigma = \sigma' + i\sigma''$) при, $\nu = \alpha$ тоді,

$$\sigma' \approx 1 - \frac{(1-\alpha^2)^2}{2}\frac{\pi^8}{\xi^8}, \tag{3.6.18}$$

$$\sigma'' \approx -\frac{(\alpha^2 - 1)\pi^4}{(\pi - 1)\xi^4} \quad . \tag{3.6.19}$$

У такому випадку Q-фактор має наступний вигляд:

$$Q \approx -\frac{\Re\sigma}{2\Im\sigma} = \frac{(\pi-1)\xi^4}{2(\alpha^2-1)\pi^4}. \tag{3.6.20}$$

У разі коли розглядається граткова мода поблизу аномалії Релея з $m > 0$ і з порядком $n = 0$, решеточная сума має особливість $\sigma \to m,\ m > 0$

$$S_0 = -1 + \frac{1}{\pi m} - \frac{\sqrt{2}i}{\pi\sqrt{m-\sigma}}, \tag{3.6.21}$$

і тоді рівняння (3.6.3) приймає вид,

$$1 + \frac{1}{1 - \dfrac{32i}{\pi t^4\left(1-\nu^2\right)}}\left(-1 + \frac{1}{\pi m} - \frac{\sqrt{2}i}{\pi\sqrt{m-\sigma}}\right) = 0, \tag{3.6.22}$$

що призводить до наступних результатів:

$$\sigma_m^0 \approx m - \frac{\pi^8 m^8\left(\alpha^2-1\right)^2}{2\xi^8} \tag{3.6.23}$$

$$\gamma_m^0 \approx \frac{\pi^4 m^3\left(1-\alpha^2\right)^2\left(\pi m-1\right)}{8\alpha\xi^4} \tag{3.6.24}$$

$$\sigma_m'^0 \approx m - \frac{(1-\alpha^2)^2}{2}\frac{\pi^8 m^8}{\xi^8} \tag{3.6.25}$$

$$\sigma_m''^0 \approx -\frac{(\alpha^2-1)\pi^4 m^5}{(\pi m-1)\xi^4}. \tag{3.6.26}$$

$$Q_m^0 \approx \frac{(\pi m-1)\xi^4}{2(\alpha^2-1)\pi^4 m^5} \tag{3.6.27}$$

Дослідження мод вищого порядку призводить до рівняння,

$$1+\left[S_0(2\pi\sigma)+S_{4n}(2\pi\sigma)\right]\frac{V_{2n}^F(2\pi\sigma/\xi)}{F_{2n}^F(2\pi\sigma/\xi)}=0\,, \tag{3.6.28}$$

яке можна звести до вигляду

$$1+\frac{\pi i}{4^n(2n)!(2n-1)!}\frac{1-\nu^2}{1+\nu^2}\left(2\pi\sigma/\xi\right)^{4n}\left(-1+\frac{2}{\pi m}-\frac{2\sqrt{2}i}{\pi\sqrt{m-\sigma}}\right)=0\,. \tag{3.6.29}$$

Наближені значення для мод порядку $n>0$ поблизу аномалій Релея порядку m мають такий вигляд:

$$\sigma_m^n\approx m-\frac{8}{4^{2n}((2n)!(2n-1)!)^2}\left(\frac{\nu^2-1}{1+\nu^2}\right)^2\left(\pi m/\xi\right)^{8n} \tag{3.6.30}$$

$$\gamma_m^n\approx\frac{(\alpha^2-1)\left(\pi m-2\right)m}{\alpha}\frac{\sqrt{2}}{2^{2n}(2n)!(2n-1)!}\frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2}\left(\pi m/\xi\right)^{4n} \tag{3.6.31}$$

$$\sigma_m'^n\approx m-\frac{8}{4^{2n}((2n)!(2n-1)!)^2}\left(\frac{\nu^2-1}{1+\nu^2}\right)^2\left(\pi m/\xi\right)^{8n} \tag{3.6.32}$$

$$\sigma_m''^n\approx-\frac{\pi^4 m}{2^{2n+1}(2n)!(2n-1)!(2-\pi m)}\frac{1-\nu^2}{1+\nu^2}\left(\pi m/\xi\right)^{4n} \tag{3.6.33}$$

$$Q_m^n\approx\frac{2^{2n+1}(2n)!(2n-1)!(2-\pi m)}{\pi^4}\frac{1+\nu^2}{1-\nu^2}\left(\xi/\pi m\right)^{4n} \tag{3.6.34}$$

3.6.2 Асимптотичні наближення у E-поляріції

Для знаходження подібних виразів для E-полярізації потрібно провести аналогічні викладки з урахуванням того, що множник V^E/F^E матиме для $m=0$ такий вигляд:

$$\frac{V_0^E(t)}{F_0^E(t)} \approx \frac{1}{1-\dfrac{4i}{\pi t^2\left(1-\nu^2\right)}} \tag{3.6.37}$$

Тоді результати для нульової моди будуть такими

$$\sigma_m^0 \approx m - \frac{\pi^4 m^4\left(\alpha^2-1\right)^2}{2\xi^4} \tag{3.6.21}$$

$$\gamma_m^0 \approx \frac{\pi^2 m\left(1-\alpha^2\right)^2\left(\pi m-1\right)}{8\alpha\xi^2} \tag{3.6.22}$$

$$\sigma_m'^0 \approx m - \frac{(1-\alpha^2)^2}{2}\frac{\pi^4 m^4}{\xi^4} \tag{3.6.23}$$

$$\sigma_m''^0 \approx -\frac{(\alpha^2-1)\pi^2 m^3}{(\pi m-1)\xi^2} \tag{3.6.24}$$

$$Q_m^0 \approx \frac{(\pi m-1)\xi^2}{2(\alpha^2-1)\pi^2 m^3} \tag{3.6.25}$$

Для знаходження асимптот для власних значень більш високого порядку, необхідно розглянути наступне рівняння:

$$1+\left[S_0(2\pi\sigma)+S_{4n}(2\pi\sigma)\right]\frac{V_{2n}^E(2\pi\,\sigma/\xi)}{F_{2n}^E(2\pi\,\sigma/\xi)}=0\,, \tag{3.7.26}$$

яке перетворюється в

$$1+\frac{\pi i}{4^n(2n)!(2n-1)!}\frac{1-\nu^2}{1+\nu^2}\left(2\pi\sigma/\xi\right)^{4n}\left(-1+\frac{2}{\pi m}-\frac{2\sqrt{2}i}{\pi\sqrt{m-\sigma}}\right)=0\,. \tag{3.7.27}$$

Тоді загальні результати для вищих мод в *E*-полярізації приймають такий вигляд:

$$\sigma_m^n \approx m - \frac{8}{4^{2n}((2n)!(2n-1)!)^2}\left(\frac{\nu^2-1}{1+\nu^2}\right)^2 \left(\pi m/\xi\right)^{8n} \tag{3.7.28}$$

$$\gamma_m^n \approx \frac{(\alpha^2-1)\left(\pi m-2\right)m}{\alpha}\frac{\sqrt{2}}{2^{2n}(2n)!(2n-1)!}\frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2}\left(\pi m/\xi\right)^{4n} \tag{3.7.29}$$

$$\sigma_m'^n \approx m - \frac{8}{4^{2n}((2n)!(2n-1)!)^2}\left(\frac{\nu^2-1}{1+\nu^2}\right)^2 \left(\pi m/\xi\right)^{8n} \tag{3.7.30}$$

$$\sigma_m''^n \approx -\frac{\pi^4 m}{2^{2n+1}(2n)!(2n-1)!(2-\pi m)}\frac{1-\nu^2}{1+\nu^2}\left(\pi m/\xi\right)^{4n} \tag{3.7.31}$$

$$Q_m^n \approx \frac{2^{2n+1}(2n)!(2n-1)!(2-\pi m)}{\pi^4}\frac{1+\nu^2}{1-\nu^2}\left(\xi/\pi m\right)^{4n} \tag{3.7.32}$$

3.6.3 ТЕОРЕМА ПОЙНТІНГА ДЛЯ ГРАТИ З КВАНТОВИХ НАНОНИТОК У ВІЛЬНОМУ ПРОСТОРІ

Розглянемо поле всередині нитки,

$$U^{\text{int}}(r,\varphi) = \sum_n a_n J_n(\nu kr)e^{in\varphi} \tag{3.7.1}$$

Тоді

$$W^a = \int_V \alpha^2 \left|U^{\text{int}}(r,\varphi)\right|^2 dv \tag{3.7.2}$$

$$W^a = \int_V \alpha^2 \left|\sum_n a_n J_n(\nu kr)e^{in\varphi}\right|^2 dv =$$

$$\alpha^2 \int_0^{2\pi}\int_0^a \left(\sum_n a_n J_n(\nu kr)e^{in\varphi}\right)\left(\sum_n a_n^* J_n(\nu kr)e^{-in\varphi}\right) d\rho d\varphi = \tag{3.7.3}$$

$$2\pi\alpha^2 \sum_n \left|a_n\right|^2 \int_0^a J_n(\nu k\rho)(J_n(\nu k\rho))^* \rho d\rho$$

Скориставшись властивістю функцій Бесселя комплексного аргументу $\overline{J_n(z)} = J_n(\overline{z})$, отримуємо, що

$$W^a = 2\pi\alpha^2 \sum_n |a_n|^2 \int_0^a J_n(\nu k\rho) J_n(\overline{\nu} k\rho)\rho d\rho \tag{3.7.4}$$

Інтеграл в останньому виразі можна обчислити в явному вигляді,

$$\begin{gathered}\int_0^a J_n(\nu k\rho) J_n(\overline{\nu} k\rho)\rho d\rho = \\ i\frac{a}{4\gamma k}\{J_n(\nu a)J_{n-1}(\overline{\nu} a) - J_{n-1}(\nu a)J_n(\overline{\nu} a)\} \\ -\frac{a}{4\alpha k}\{J_n(\nu a)J_{n-1}(\overline{\nu} a) + J_{n-1}(\nu a)J_n(\overline{\nu} a)\},\end{gathered} \tag{3.7.5}$$

де також можна мати на увазі, що

$$J_n(\nu a)J_{n-1}(\overline{\nu} a) - J_{n-1}(\nu a)J_n(\overline{\nu} a) = 2i\,\mathrm{Im}(J_n(\nu a)(J_{n-1}(\nu a))^*) \tag{3.7.6}$$

$$J_n(\nu a)J_{n-1}(\overline{\nu} a) + J_{n-1}(\nu a)J_n(\overline{\nu} a) = 2\,\mathrm{Re}(J_n(\nu a)(J_{n-1}(\nu a))^*) \tag{3.7.7}$$

$$\begin{gathered}\int_0^a J_n(\nu k\rho) J_n(\overline{\nu} k\rho)\rho d\rho = \\ -\frac{a}{2\gamma k}\mathrm{Im}(J_n(\nu a)(J_{n-1}(\nu a))^*) - \frac{a}{2\alpha k}\mathrm{Re}(J_n(\nu a)(J_{n-1}(\nu a))^*)\end{gathered} \tag{3.7.8}$$

Зовнішнє поле зручніше записати через гармоніки Флоке,

$$U^{out}(x,y) = \sum_s f_s e^{-i\pi_s kx} e^{k\tau_s y} \quad |y| > \delta \tag{3.7.9}$$

Вектор Пойнтінга над і під гратами записується так:

$$\Pi^{+} = \frac{1}{2} E^{+} H^{+*}, \quad \Pi^{-} = \frac{1}{2} E^{-} H^{-*} \tag{3.7.10}$$

де $H(x,y) = \sum_s f_s e^{-i\pi_s kx} e^{k\tau_s y}$ і $E(x,y) = \sum_s \pi_s f_s e^{-i\pi_s kx} e^{k\tau_s y}$.

В такому випадку значення вектора Пойнтінга виражаються через гармоніки Флоке наступним чином:

$$\begin{aligned} \Pi^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\sum_s f_s^{\pm} e^{-i\pi_s kx} e^{\mp k\tau_s y}\right)\left(\sum_s \pi_s f_s^{\pm} e^{-i\pi_s kx} e^{\mp k\tau_s y}\right)^{*} = \\ \frac{1}{2}\left(\sum_s f_s^{\pm} e^{i\pi_s kx} e^{\mp k\tau_s y}\right)\left(\gamma_s \sum_s f_s^{\pm *} e^{i\pi_s kx} e^{\pm k\tau_s^{*} y}\right) \end{aligned} \tag{3.7.11}$$

Потік вектора Пойнтінга в разі періодичності можна записати як

$$P = \int_S \Pi n ds = \int_{-p/2}^{p/2} \Pi n dx = \frac{p}{2} \sum_s \pi_s \left| f_s \right|^2 = \frac{\pi}{k} \sum_s s \left| f_s \right|^2 \tag{3.7.12}$$

Тоді виявляється, що порога самозбудження всякої моди періодичного резонатора з квантових ниток можна пов'язати з амплітудами гармонік Флоке і коефіцієнтами розкладання поля всередині нитки,

$$\gamma = \frac{4\alpha\pi \sum_s s \left| f_s \right|^2}{ika \sum_n \left| a_n \right|^2 \{\bar{\nu} J_n(\nu ka) J_{n-1}(\bar{\nu} ka) - \nu J_{n-1}(\nu ka) J_n(\bar{\nu} ka)\}} \tag{3.7.14}$$

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

У даному розділі була розглянута лазерна завдання на власні значення для нескінченної решітки з квантових нанониток, а також завдання розсіювання плоскої хвилі на решітці з діелектричних нанониток. Були досліджені граткових резонанси, що виникають біля аномалій Релея. Для них були отримані асимптотичні наближення. За результатами досліджень, опублікованих в статтях [2,6] і працях конференцій [15, 20,23-24,26, 29, 36, 43, 46-47], можна зробити наступні висновки:

1. Нескінченні решітки з кругових ниток володіють двома типами мод; перші пов'язані з власними модами однієї нитки, і другі (граткових) виникають поблизу аномалій Релея і викликані періодичністю структури.

2. На прикладі решітки з діелектричних і квантових ниток з однаковим показником заломлення показано гарне узгодження частот випромінювання граткових мод і резонансних частот при дифракції плоскої хвилі. Так для граткових мод пороги самозбудження малі, то в задачі дифракції на частоті, близькій до лазерної частоті, спостерігаються дуже вузькі резонансні піки з максимумами, дуже близькими до 1.

3. Граткові моди мають високу добротність, причому вона підвищується, якщо відношення періоду до радіусу ниток решітки збільшується. У задачі дифракції це проявляється у звуженні резонансних піків, а в лазерної завданню - в зниженні порога самозбудження.

4. Граткові моди проявляють свої електромагнітні властивості особливо яскраво, якщо контраст між показниками заломлення ниток і навколишнього середовища малий. Так, для решітки у вільному просторі з нитками, які мають показник заломлення 1.01 при відношенні періоду до радіусу ниток, що дорівнює 4, резонансний пік має ширину менше 10^{-10}.

5. На резонансній частоті нбраткової моди поле поблизу від решітки має високу амплітуду, а його максимуми лежать точно в центрах ниток і між ними. Слід також зазначити, що зона високої інтенсивності поля

простягається далеко від решітки: наприклад, для решітки з показником заломлення 2.48 і ставленням періоду до радіусу нитки, рівним 20, зона високої інтенсивності поширюється на 200 періодів від решітки.

6. Для граткових мод виведені асимптотичні наближення для порогів і частот самозбудження в лазерної задачі (для решітки з квантових ниток), а також комплексні частоти і добротності мод (для решітки з пасивних ниток). Дані асимптотичні наближення показують, що поблизу кожної аномалії Релея (точки розгалуження) знаходиться нескінченне число власних мод (полюсів).

РОЗДІЛ 4
ПЛАЗМОНІ ЕФЕКТИ НА МЕТАЛО-ДІЕЛЕКТРИЧНИХ РЕШІТКАХ З НАНОНИТОК

У цьому розділі розглянуто побудову електродинамічної моделі нескінченної решітки з срібних кругових циліндрів (нанониток) і досліджені два типи резонансів, що виникають при падінні на неї плоскої *H*-поляризованої хвилі. Також розвинений метод дослідження поля в присутності решітки, що складається з двох різних циліндрів на періоді. За допомогою такого модифікованого методу можна аналізувати лазерну задачу для бінарної решітки з активних діелектричних (квантових) і срібних ниток. Додатково вивчаються задачі розсіювання і випромінювання хвиль решітками з двошарових нанониток, де срібна серцевина покрита концентричним активним шаром, що дає можливість краще вивчити плазмонів ефекти.

4.1 Формулювання задачі та опис діелектричною функції срібла

Дослідження плазмонних резонансів в розсіянні і поглинанні світла на металевих наночастках і їх застосування в нанобіосенсорах, наноантенах і нанолазерах є актуальною задачею сучасної нанофотоніки. Металеві нанонити також здатні демонструвати інтенсивні плазмоні резонанси в разі освітлення світлом, поляризованим перпендикулярно до осі нанониті (*H*-поляризація). Якщо довжина нанонити значно більше довжини хвилі у вільному просторі, то її властивості можуть бути досліджені в рамках двовимірної задачі. Завдяки цьому розсіювання *H*-поляризованих хвиль на одиночній нанонити з благородного металу було досліджено у великій кількості публікацій і для різних форм поперечного перерізу: кругового, еліптичного, прямокутного, багатокутного та інших. Довжина хвилі оптичного плазмонного резонансу залежить, перш за все, від форми поперечного перерізу нанонити. Наприклад, плоска тонка металева стрічка з діелектричної проникністю $\mathrm{Re}\,\varepsilon_s < 0$, яка знаходиться в матеріалі з $\mathrm{Re}\,\varepsilon_h > 0$, демонструє широкий пік в спектрах діаметрів поглинання і розсіяння. Значення резонансної довжини хвилі при цьому залежить від відносини ширини до товщині стрічки. Якщо навколишнє середовище - вільний простір, то при розмірах перетину стрічки 150×50 нм^2 вона дорівнює $\lambda^P \approx 410$ нм, а при 150×20 нм^2 вона зсувається на $\lambda^P \approx 550$ нм.

Для срібної нанонитки кругового перетину, поділ змінних призводить до математичних викладок, подібних до тих, які були пророблені в третьому розділі. Рішення задачі розсіювання на одиночній нанонити зі срібла у вільному просторі зводиться до сумування рядів з відомими коефіцієнтами. Воно показує, що в спектрі діаметра повного розсіювання присутній широкий плазмонний пік на довжині хвилі $\lambda^P \approx 338$ нм [122], тобто приблизно там, де діелектрична функція срібла $\mathrm{Re}\,\varepsilon(\lambda^P) \approx -1$. Більш детальне дослідження цього піку дозволяє встановити, що його причиною є

нескінченне число близько розташованих полюсів розсіяного поля як функції довжини хвилі. Кожен з них відповідає плазмонів моді азимутального порядку n ($n \geq 1$) характеристичного рівняння (3.1.13). Відповідні цим модам резонанси зливаються, так як у фіолетовій області спектра в сріблі присутні великі втрати, а саме $\mathrm{Im}\,\varepsilon(\lambda^P) \approx 0.31$. При цьому, хоча нескінченаа кількість мод дає внесок в загальний пік, найбільшу роль відіграють дипольні плазмони с $n = \pm 1$.

Дослідження розсіювання світла на нитках з поперечним перерізом некругової форми вимагає використовувати більш складні методи, такі як об'ємні [128,129] або граничні інтегральні рівняння [130, 131]. Такі нанонити демонструють не один, а кілька плазмонних резонансів, інтенсивність яких залежить від кута падіння. Подібним чином поводяться і кластери з двох або трьох і більше нанониток [129-131]. Розсіювання світла на одній і двох нанонитках з благородних металів було вивчено в багатьох роботах, де їх плазмонні резонанси були продемонстровані і охарактеризовані. Однак періодичні ланцюги з більшої кількості ниток, а особливо нескінченні решітки з них, залишилися недостатньо дослідженими.

Зі сказаного вище і результатів розділів 2 і 3 можна зробити припущення, що якщо матеріалом нанонити з радіусом, багато меншим довжини хвилі світла, є срібло, то обидва типи резонансів (плазмонний і гратковий) можуть бути присутніми в оптичному діапазоні. Їх взаємовплив має залежати від структури періоду решітки і не було ще досліджено на достатньому рівні. Наприклад, нам не вдалося знайти опублікованих раніше спектральних залежностей коефіцієнтів відбиття або проходження для решітки їх золотих або срібних нанониток кругового перетину.

Разом з тим, слід зазначити, що кілька років тому було виявлено, що ланцюг з кінцевого числа золотих наносфер може давати посилене розсіювання світла на довжині хвилі, дуже близькою до періоду ланцюга. Це

було спочатку передбачено теоретично на основі простого дипольного наближення для кожної сфери [131], а згодом було підтверджено під час розрахунків, заснованих на дискретному дипольному наближенні і методі Т-матриць [132, 139]. Пізніше, вузькі резонанси з шириною в декілька нанометрів спостерігалися експериментально решітках з кінцевого числа металевих наночастинок біля аномалії Релея в [127-134]. Спочатку їх природа пов'язувалася з поверхневими плазмонами, через що використовувалася «плазмонів» термінологія: «radiatively non-decaying plasmons», «supernarrow plasmon resonances», а також «plasmon resonances based on diffraction coupling of localized».

В роботі [140] було запропоновано побудувати багаточастотну нано-антену, засновану на кінцевому масиві частинок з періодами, рівними довжинами хвиль, які вимагаються для отримання бажаного спектрального відгуку в ближньому полі («photonic resonance»). При цьому очевидно, що автори [133-141] мали справу, в дійсності, з гратковими резонансами, хоча, безсумнівно, плазмонного резонансу також були присутні.

Для правильного моделювання плазмонного розсіювача, слід точно описати дисперсію діелектричної проникності металу, тобто використовувати коплекснозначную діелектричну функцію, $\varepsilon(\lambda)$. У таких випадках часто використовують формули Друде. Однак добре відомо, що вони не здатні відтворити однаково точно поведінку і реальною і уявною

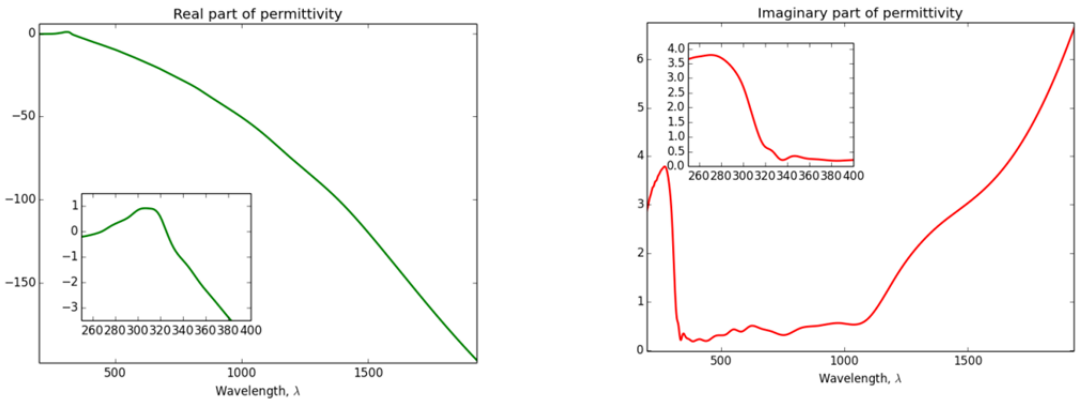


Рис. 4.1. Дійсна і уявна частини відносної діелектричної проникності срібла в оптичному діапазоні довжин хвиль

частин проникності, $\mathrm{Re}\,\varepsilon(\lambda)$ і $\mathrm{Im}\,\varepsilon(\lambda)$. Зазвичай в таких випадках нехтують уявної частиною на користь дійсної, і, отже, втрати в металі враховуються з

великою похибкою. Тому в своїх розрахунках ми використовували не модель Друде, а експериментальні дані Джонсона і Крісті, отримані з вимірювань [142]. Для отримання безперервної діелектричної функції срібла ми застосовували метод інтерполяції задопомогою сплайнів, використовуючи стандартну бібліотеку пітона [143]. Зауважимо ще, що всіма нелокальними ефектами, тобто впливом кінцевих розмірів частки на функцію діелектричної проникності, можна знехтувати, якщо ці розміри перевищують 2 нм.

Надалі в цьому розділі буде досліджуватися тільки *H*-поляризація, тому що, хоча граткових моди і резонанси на них існують і для випадку *E*-поляризації, плазмонів ефекти присутні тільки в *H*-поляризації. Як і в попередніх розділах, основна увага буде приділена нормальному падіння плоских хвиль, оскільки цей випадок природним чином призводить до дослідження задачі на власні значення для синфазних лазерних решіток. При похилому падінні розсіювання стає більш складним, так як це вимогає розрахунку повної матриці (3.1.19) та граткових сум за парних та непраних порядків.

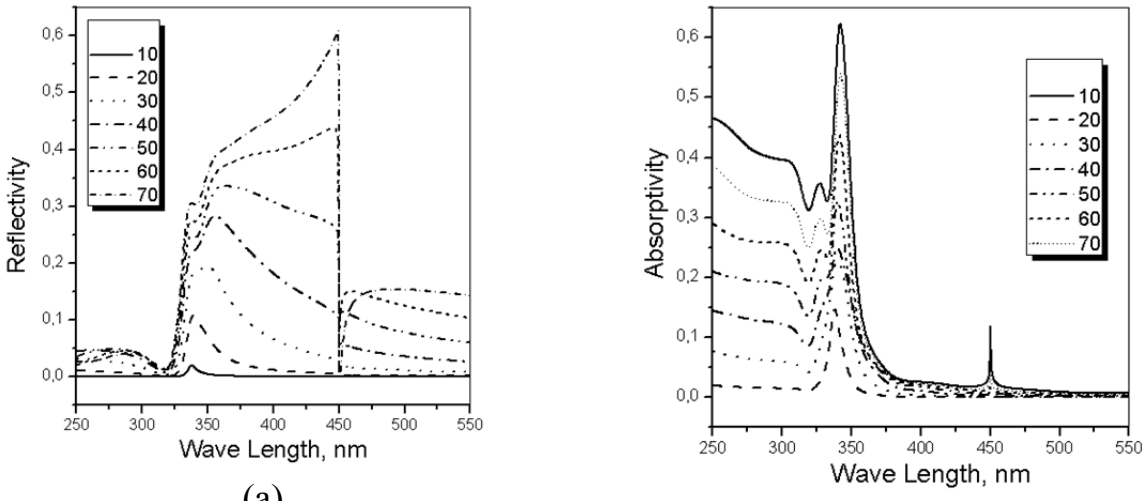
4.2 Решітка з срібних ниток у вільному просторі

На Рис. 4.2 наведені залежності коефіцієнтів відбиття і поглинання за потужністю плоскої хвилі від срібної решітки з періодом p = 450 нм від довжини хвилі падаючої хвилі. Обчислення проводилися за допомогою алгоритму, викладеного в розділі 3.

Тут можна спостерігати спільний ефект двох видів резонансів. Перший, що знаходиться на довжині хвилі $\lambda = 340$ nm, має плазмонів природу. Це єдиний резонанс, помітний при радіусі $a << p$, а саме, від 10 нм до 30 нм. Для великих значень періоду можна спостерігати появу іншого типу резонансу, пов'язаного з періодом структури, p.

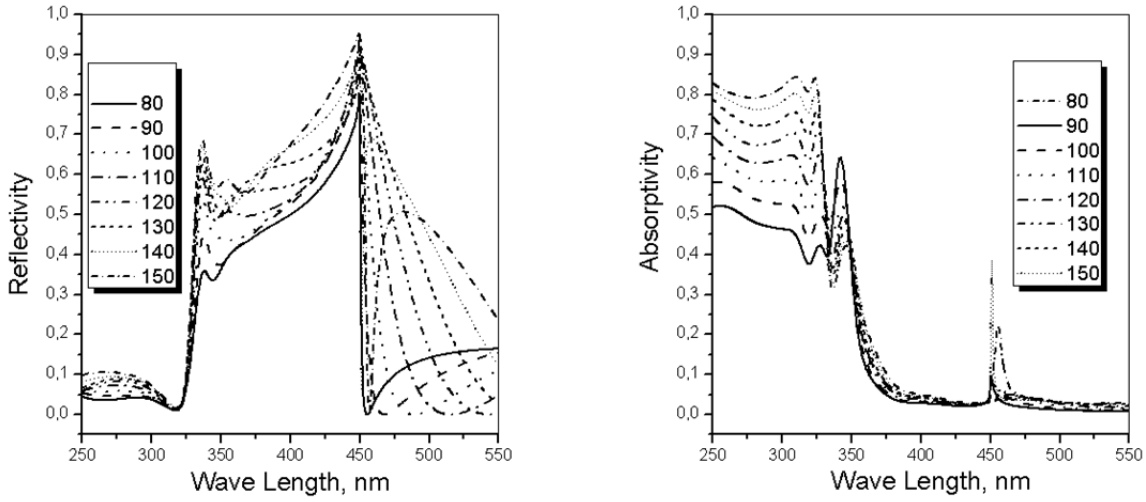
Для коефіцієнтів відбиття і проходження цей резонанс має форму подвійного екстремуму (форма Фано). Якщо ці два резонансу існують разом, то вони утворюють смугу високого відбивання шириною, що приблизно дорівнює відстані між довжиною хвилі плазмонного резонансу і періодом структури. Коефіцієнт поглинання також має резонансну поведінку, причому його максимуми відповідають тільки вищенаведеним модам.

Більш повну інформацію про поведінку коефіцієнтів відбиття, проходження і поглинання можна отримати, побудувавши їх рельєфи в



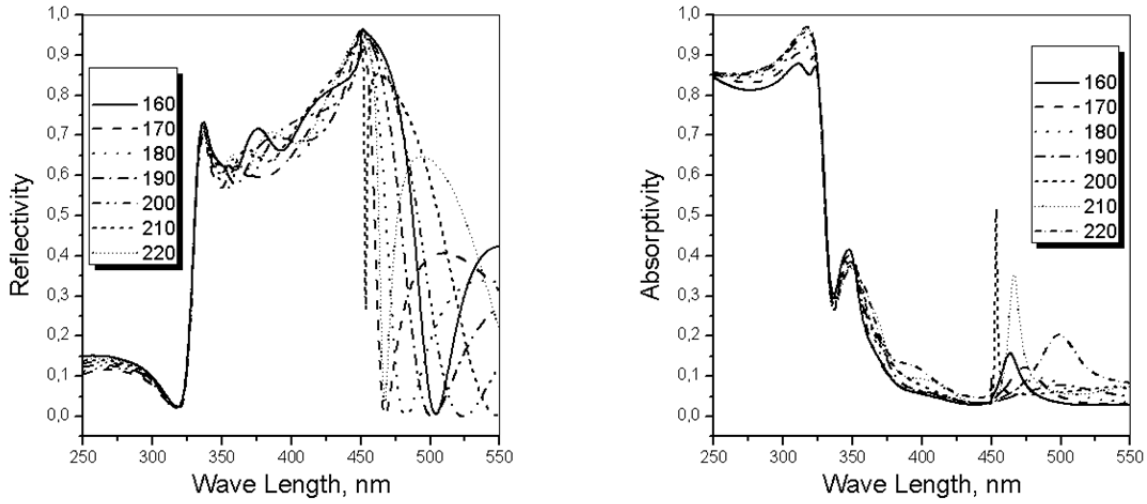
(а) (б)

Рис 4.2. Коефіцієнт відбиття (а) і поглинання (б) нормально падаючої плоскої хвилі на решітці з срібних нанониток. Період решітки 450 нм, а радіуси ниток варіюються від 10 нм до 70 нм.



(а) (б)

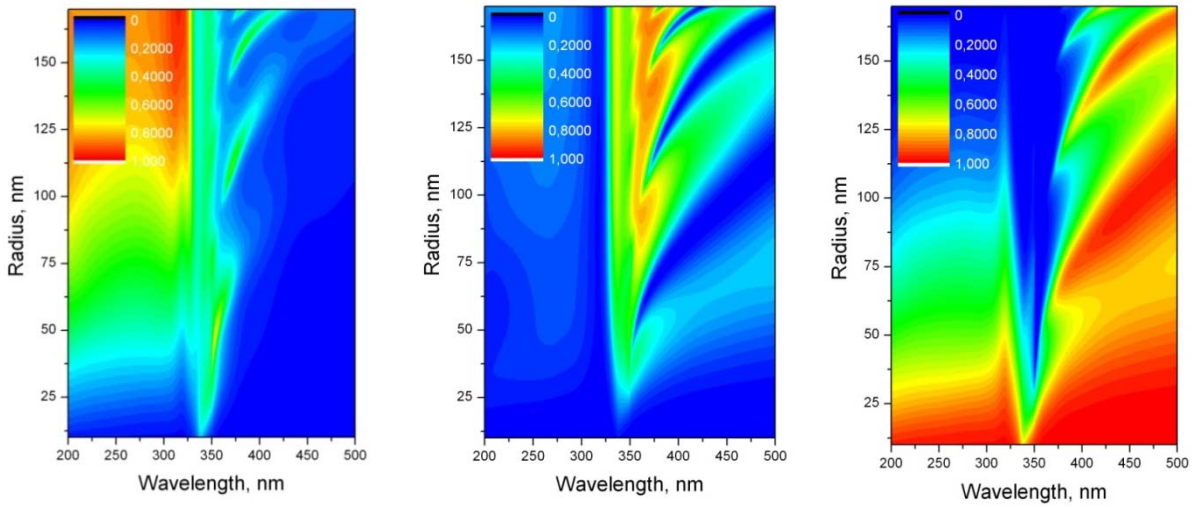
Рис 4.3. Коєфіцієнт відбиття (а) і поглинання (б) нормально падаючої плоскої хвилі на решітці з срібних нанониток. Період решітки 450 нм, а радіуси ниток варіюються від 80 нм до 150 нм.



(а) (б)

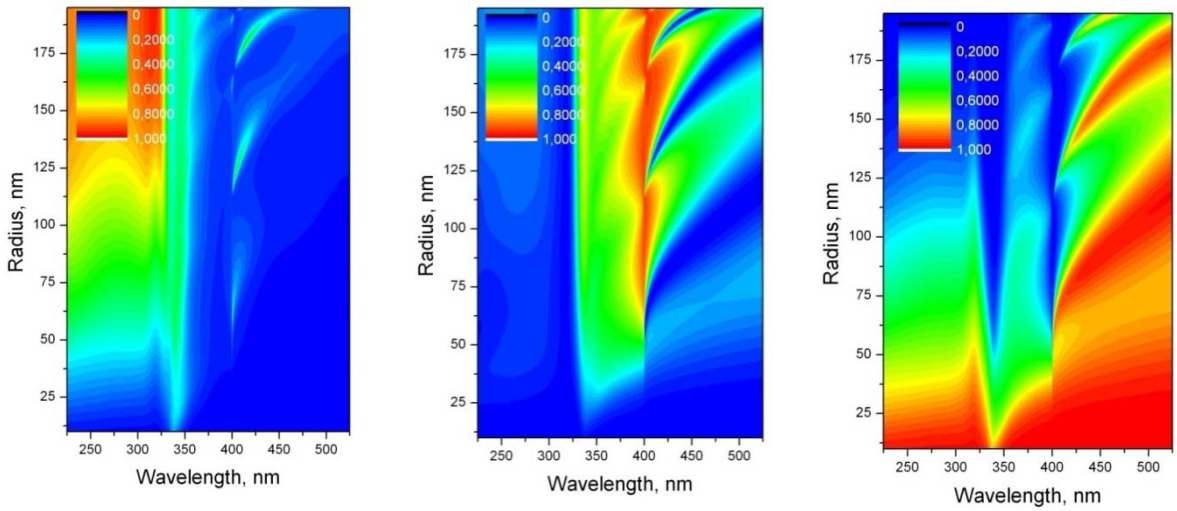
Рис. 4.4. Коєфіцієнт відбиття (а) і поглинання (б) нормально падаючої плоскої хвилі на решітці з срібних нанониток. Період решітки 450 нм, а радіуси ниток варіюються від 160 нм до 220 нм.

залежності від довжини хвилі і радіусу срібною нанонити - див. Рис. 4.5, 4.6 і 4.7 для значень періоду p = 450 нм, 350 нм і 400 нм, відповідно Для всіх рельєфів діапазон зміни довжини хвилі був обраний у межах $\lambda \in [200\text{нм}, 500\text{нм}]$, а радіус варіювався від 10 нм до половини періоду мінус 5 нм, щоб гарантувати, що циліндри не стикатимуться або перетинатися.



(а) (б) (в)

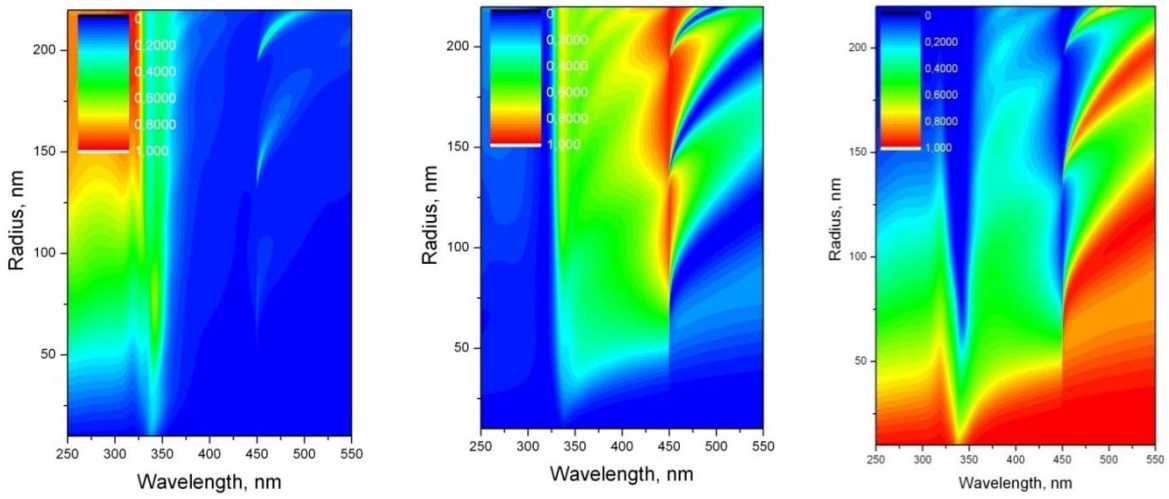
Рис. 4.5. Рельєфи коефіцієнтів відбиття (а), проходження (б) і поглинання (в) плоскій *H*-поляризованої хвилі на решітці з срібних наноніток з періодом $p = 350$ нм як функція довжини хвилі і радіусу нанониток.



(а) (б) (в)

Рис. 4.6. Рельєфи коефіцієнтів відбиття (а), проходження (б) і поглинання (в) плоскій *H*-поляризованої хвилі на решітці з срібних наноніток з періодом $p = 400$ нм як функція довжини хвилі і радіусу нанониток.

На наведених рельєфах, плазмонному резонансу відповідає широкий вертикальний «хребет» уздовж значення довжини хвилі 340 нм, а граткову резонансам відповідають більш вузькі і більш яскраві «хребти» і паралельні їм «ущелини», що тягнуться вздовж значення $\lambda = p$ (450 нм) при тонких нитках і відходять від нього, якщо нитки стають товстішими.

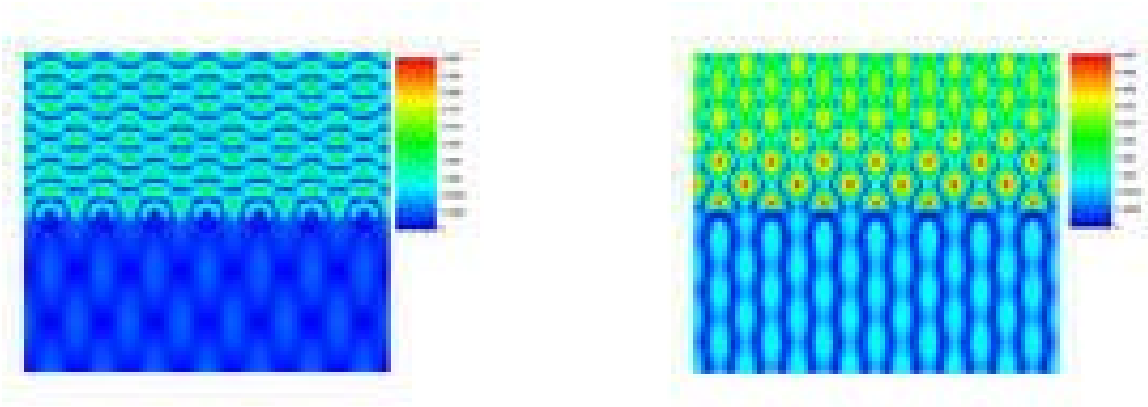


(а) (б) (в)

Рис. 4.7. Рельєфи коефіцієнтів відбиття (а), проходження (б) і поглинання (в) плоскій *H*-поляризованої хвилі на решітці з срібних наноніток з періодом $p = 450$ нм як функція довжини хвилі і радіусу нанониток.

Слід підкреслити, що в дослідженому діапазоні зміни довжини хвиль і радіусу нанониток спостерігається присутність не одного, а декількох (2 або 3) граткових резонансів. Вони розрізняються між собою симетрією поля відповідної моди (власного коливання) щодо площини решітки (тобто, осі X).

Резонансні поля в ближній зоні решітки показані на Рис. 4.8: вони демонструють підвищене відображення падаючої плоскої хвилі.



(а) (б)

Рис. 4.8. Полное магнитное поле в плазмонном резонансе при $\lambda = 335.8$ нм (а) и в решеточном резонансе при $\lambda = 447.6$ нм (б) для решетки из серебряных нитей с радиусом $a = 90$ нм и периодом $p = 450$ нм

4.3 Бінарних решітка з срібних і діелектричних ниток

Бінарна решітка, що складається з двох різних ниток на періоді, цікавить нас в зв'язку з тим, що одну з ниток можна уявити собі як що складається з активного матеріалу (квантова нитка), тобто ввести таким чином активну зону в періодичний відкритий резонатор. Оскільки для вивчення розсіювання хвиль на такій решітці ми будемо користуватися операційним методом, то спочатку має сенс повторити з його допомогою висновок рівнянь розділу 3 для решітки з однією ниткою на періоді. Це дозволить нам потім узагальнити результати на випадок кілька кругових ниток на періоді.

Запишемо поле нормально падаючої плоскої хвилі в локальній системі полярних координат з центром на осі 0-й нитки, в векторній формі,

$$U^{inc} = \tilde{J}^T \cdot p\,, \tag{4.3.1}$$

де $\tilde{J}$ - вектор гармонік Бесселя,

$$\tilde{J} = [J_m(k\rho_0)e^{im\varphi}] \tag{4.3.2}$$

а p - коефіцієнти розкладання, рівні

$$p = [(-1)^m] \tag{4.3. 3}$$

Зовнішнє поле для кожної нитки виражається через функції Ханкеля першого роду відповідно до нашим вибором знака залежності від часу,

$$U_s = [H_m(k\rho_s)e^{im\varphi_s}], \tag{4.3.4}$$

де ρ_s і φ_s - локальні координати з центрами в точках *(sp,*0), *s* = 0,1,2 , ...

Таким чином, розсіяне від всіх ниток поле матиме вигляд,

$$U^{scat}(x,y)=\sum_{s}U_s^t b\,. \qquad (4.3.5)$$

У останньому розкладанні сумування проводиться від -∞ до +∞, а вектор $b=[b_s]$ являє собою вектор невідомих коефіцієнтів розкладання поля в азимутальний ряд Фур'є в нульовий осередку. Тоді теорема додавання для функцій Бесселя призводить до відомого раніше результату,

$$U^{scat}(x,y)=(\tilde{J}^t\cdot L+F_0)b\,, \qquad (4.3.6)$$

де оператор

$$L=[S_{m-n}(kp)] \qquad (4.3.7)$$

представляє періодичність структури завдяки тому, що він побудований з «граткових сум». Тоді вектор невідомих задовольняє рівняння

$$b=T\cdot(p+L\cdot b) \quad \text{або,}\ b=(I-T\cdot L)^{-1}T\cdot p \qquad (4.3.8)$$

де оператор T - матриця розсіювання однієї кругової нитки. Дана система алгебраїчних рівнянь повністю збігається з системою (3.1.7), яка не є матричним рівнянням Фредгольма другого роду та в силу цього не може бути використана при розрахунках. Щоб виправити цей недолік, вводиться перетворення вектора невідомих $x=J^{-1}\cdot b$, де

$$J=[J_m(\alpha ka)\delta_m^n] \qquad (4.3.9)$$

діагональна матриця, причому α - показник заломлення матеріалу нитки. Тоді операторні рівняння для нових невідомих мають наступний вигляду

$$x = (I - J^{-1} \cdot T \cdot L \cdot J)^{-1} J^{-1} \cdot Tp\,. \qquad (4.3.10)$$

Резольвенту в (4.3.10), тобто, матриця $(I - J^{-1} \cdot T \cdot L \cdot J)$ точно відповідає системі лінійних рівнянь (3.1.15) при $l = 1$. Далі, гармоніки Флоке для розсіяного решітками поля можна отримати застосуванням оператора

$$U^{\pm} = [i^m e^{\mp im\phi_s}], \qquad (4.3.11)$$

відповідний перетворенню (3.3.3). Таким чином, гармоніки відображеного $R = \{f^+\}$ і минулого $F = \{f^-\}$ полів мають такий вигляд:

$$R = U^+ \cdot J^{-1} \cdot (I - J^{-1} \cdot T \cdot L \cdot J)^{-1} \cdot J^{-1} \cdot Tp \qquad (4.3.12)$$

$$F = \delta_0^s + U^- \cdot J^{-1} \cdot (I - J^{-1} \cdot T \cdot L \cdot J)^{-1} \cdot J^{-1} \cdot Tp \qquad (4.3.13)$$

Тепер потрібно побудувати оператор розсіювання плоскої хвилі на двох циліндрах, центри яких знаходяться в довільних точках, і мають довільні радіуси (такі, що циліндри не перетинаються і не торкаються один одного), з вільним вибором матеріалу.

Тоді загальне розсіяне поле буде формуватися з суми полів f_i розсіяних на кожній з ниток за умови наявності іншої нитки, або

$$T = \beta_{0,1} f_1 + \beta_{0,2} f_2 \qquad (4.3.14)$$

$$f_1 = T_1 \left[\beta_{1,0} p + \alpha_{1,2} f_2 \right] \qquad (4.3.15)$$

$$f_2 = T_1 \left[\beta_{2,0} p + \alpha_{2,1} f_1 \right], \qquad (4.3.16)$$

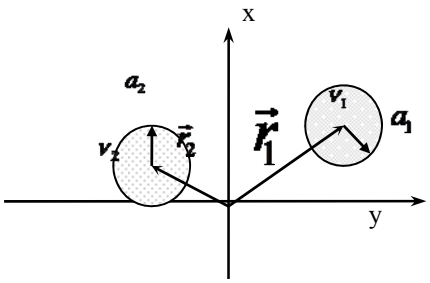


Рис. 4.9. Поперечний переріз елементарного періоду для решітки з двома круговими нитками на періоді.

Тут квадратні матриці α і β являють собою матриці перетворення для функцій Бесселя другого і першого роду, відповідно, з точки з полярними координатами $\vec{r}_i$ в $\vec{r}_j$

$$\alpha_{i,j} = [H_{n-m}(k\,|\,\vec{r}_i - \vec{r}_j\,|)e^{i(n-m)Arg(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}], \tag{4.3.17}$$

$$\beta_{0,i} = [J_{n-m}(k\,|\,\vec{r}_i\,|)e^{-i(n-m)Arg(\vec{r}_i)}] \tag{4.3.18}$$

$$\beta_{i,0} = [J_{n-m}(k\,|\,\vec{r}_i\,|)e^{i(n-m)Arg(\vec{r}_i)}], \tag{4.3.19}$$

Пряма підстановка виразів (4.3.3) (4.3.6) в (4.3.2) приводить до наступних уявленням поля, розсіяного від кожного з циліндрів:

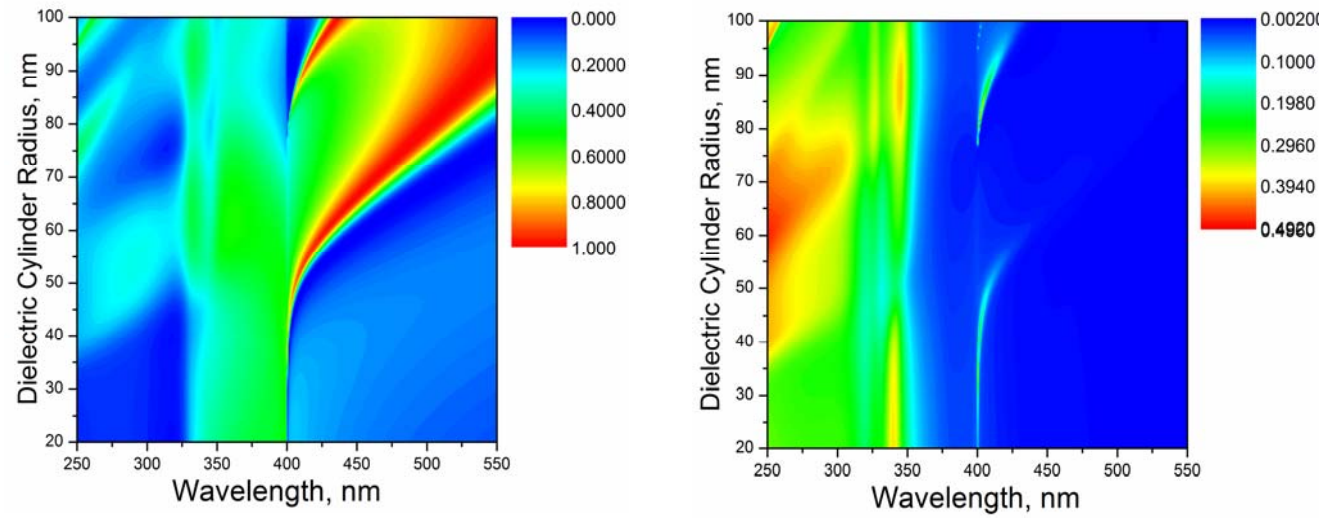
$$f_1 = (I - T_1\alpha_{1,2}T_2\alpha_{2,1})^{-1}T_1(\beta_{1,0} + \alpha_{1,2}T_2\alpha_{2,1}), \tag{4.3.20}$$

$$f_2 = (I - T_2\alpha_{2,1}T_1\alpha_{1,2})^{-1}T_2(\beta_{2,0} + \alpha_{2,1}T_1\alpha_{1,2}). \tag{4.3.21}$$

Тому оператор з (4.3.15) приймає наступну форму:

$$\begin{aligned} T = {} & \beta_{0,1}(I - T_1\alpha_{1,2}T_2\alpha_{2,1})^{-1}T_1(\beta_{1,0} + \alpha_{1,2}T_2\alpha_{2,1}) + \\ & \beta_{0,2}(I - T_2\alpha_{2,1}T_1\alpha_{1,2})^{-1}T_2(\beta_{2,0} + \alpha_{2,1}T_1\alpha_{1,2}) \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Перейдемо до розгляду результатів розрахунків коефіцієнтів відбиття, проходження і поглинання плоскою *H*-поляризованої хвилі на бінарної решітці з срібних і діелектричних ниток. Як приклад досліджуємо структуру, в якій обидві нанонити розташовані в площині решітки, а період дорівнює $p = 400$ нм, Тобто, обраний таким, щоб гратковий резонанс перебував недалеко від плазмонного. Нехай перша нитка виготовлена зі срібла, має радіус $a_1 = 50$нм, і знаходиться на відстані 100 нм праворуч від центру координат або $r_1 = 100$ нм, $\phi_1 = 0$. Нехай діелектрична нитка має радіус a_2, що змінюється у межах $a_2 \in [20\text{нм}, 100\text{нм}]$ розташована зліва від центру на відстані 100 нм, тобто $r_2 = 100$ нм, $\phi_2 = \pi$. Така решітка, де перша нитка є діелектрик з показником заломлення $\alpha = 2.48$, а друга срібна, досліджувалась на розсіянні *H*-поляризованої нормально падаючої хвилі. Відповідні рельєфи коефіцієнту відбиття та поглинання представлені на Рис. 4.10. Вони наочно ілюструють поведінку відповідного коефіцієнта відбиття як функції двох змінних: довжини хвилі і радіуса діелектричного циліндра.



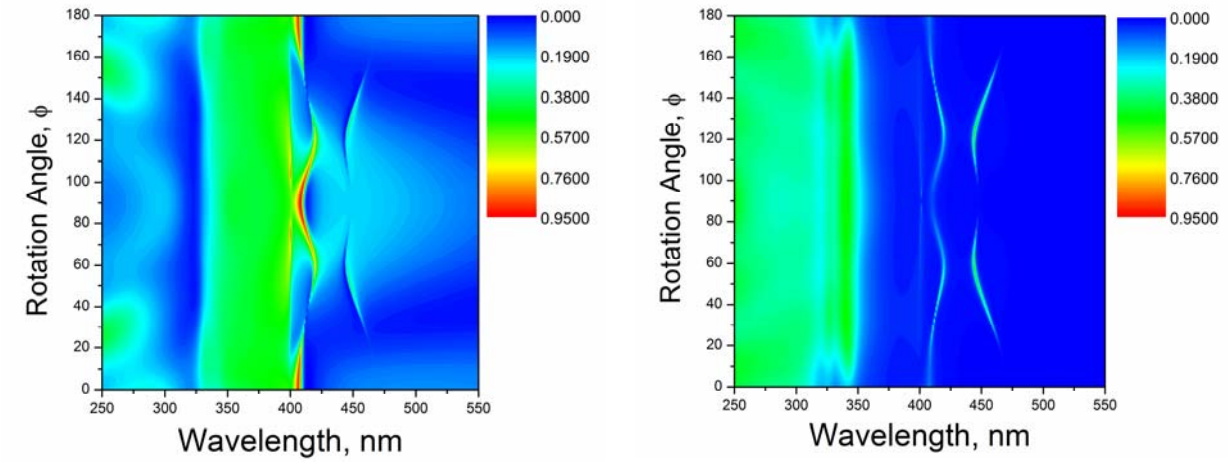
(а) (б)

Рис. 4.10. Рельєфи коефіцієнтів відбиття (а) і поглинання (б) плоскої хвилі від решітки з срібних і діелектричних ниток з періодом $p = 400$нм. Срібна нитка розташована в точці $r_1 = 100$нм, $\phi_1 = 0$, і має радіус $a_1 = 50$нм. Діелектрична нитка з показником заломлення $\alpha = 2.48$ розташована в $r_2 = 100$нм, $\phi_1 = \pi$, та має радіус a_2.

Як можна бачити, бінарна решітка успадковує оптичні властивості обох однорідних решіток, з діелектричних і з срібних ниток у вільному просторі. Разом з тим, це поведінка далеко не є очевидною.

Щоб краще зрозуміти, що відбувається при розсіянні *H*-поляризованої хвилі на бінарної решітці, уявімо собі, що на кожному періоді обидві нанонити синхронно повертаються навколо локального центру координат. При цьому нехай радіуси обох ниток фіксовані і дорівнюють один одному, $a_1 = a_2 = 50\,\text{нм}$, відстані від локального центру до осі кожної нитки також дорівнюють один одному, $r_1 = r_2 = 100$ нм, а їх положення в просторі характеризується кутом ϕ, причому $\phi_1 = \phi$ і $\phi_2 = \pi + \phi$. Відповідні такому уявному експерименту кольорові рельєфи коефіцієнтів відбиття і поглинання на поле довжини хвилі світла і кута повороту ϕ показані на Рис. 4.11. Порівнюючи рельєфи на Рис. 4.6 і Рис. 4.11, зауважимо, що зрізи рельєфів на першому при $a_2 = 50\,\text{nm}$ відповідає зрізах на другому для значень кута повороту $\phi = 0^\circ, 180^\circ$.

На Рис. 4.11 добре видно плазмонний резонанс металевих ниток на



(а) (б)

Рис. 4.11. Рельєфи коефіцієнтів відбиття (а) і поглинання (б) плоскої хвилі від решітки з срібних і діелектричних нанониток з періодом $p = 400\,\text{нм}$. Срібна нитка розташована в точці $r_1 = 100$ нм, $\phi_1 = \phi$ і має радіус $a_1 = 50\,\text{нм}$. Діелектрична нитка з коефіцієнтом заломлення $\alpha = 2.48$ розташована в $r_2 = 100\,\text{нм}$, $\phi_1 = \phi + \pi$ і має радіус $a_2 = 50\,\text{нм}$.

довжині хвилі близько 340 нм, положення якого не залежить від кута ϕ.

Граткові резонанси проявляються як три «хребта» подібні до хвилі праворуч від довжини хвилі, що дорівнює періоду, $\lambda = p$. Слід зауважити, що найбільш довгохвильовий резонанс зникає при $\phi = 0, \pi/2, \pi$, тобто якщо срібна і діелектрична нанонити знаходяться в площині решітки або ж зміщені з неї в перпендикулярному напрямку. Це можна пояснити тим фактом, що відповідна мода володіють антисиметричними щодо осі *Y* власним полем і не відгукуються на падаюче поле, яке при нормальному падінні є симетричним щодо осі *Y*. Такі моди іноді називають «темними».

Як можна було очікувати, смуга між плазмоними і гратковими резонансами шириною приблизно 60 нм, в якій спостерігається висока відображення, залишається майже незмінною для будь-якого значення кута ϕ.

Тепер перейдемо до вивчення задачі на власні значення для даної бінарної решітки з нанониток, що розглядається в якості періодично структурованої лазерної платформи. Для цього приймемо, що діелектричні нитки - це квантові нитки з матеріалу, що має посиленням, тобто мають накачування. У електродинамічної моделі це означає, що коефіцієнт заломлення їх матеріалу має комплексне значення $\nu = \alpha - i\gamma$, де речова частина збігається з тим коефіцієнтом заломлення, який використовувався в завданні розсіювання, а уявна частина - це матеріальний поріг самозбудження відкритого резонатора з активною зоною. Постановка лазерної задачі аналогічна подібної задачі для квантових ниток у вільному просторі, дослідженої в розділі 3.

З точки зору фізики істотно те, що тепер крім втрат енергії на випромінювання у вільний простір є ще і омичні втрати в срібних нанонитах. Таким чином, шукаються впорядковані пари чисел (λ, γ), що задовольняють характеристическому рівнянню

$$\det(I - J^{-1} \cdot T \cdot L \cdot J) = 0, \tag{4.3.24}$$

де оператор T будується завдяки виразом (4.3.23).

Дане рівняння, будучи узагальненням рівняння (3.1.23), породжене безкінечновимірним матричним оператором Фредгольма другого роду, тому відповідний детермінант існує як функція параметрів. Коріння детермінантного рівняння можна відшукувати, Усік матрицю до кінцевого порядку *N,* і їх збіжність до точних коренів, при зростаючому *N,* гарантована теоремами Фредгольма. Така поведінка проілюстровано на Рис. 4.12, де представлена залежність обчислювальної помилки від порядку усічення матриці при знаходженні власного значення (порогу і довжини хвилі). При цьому геометрія бінарної решітки була такою ж, як при дослідженні розсіювання плоскої вони($a_1 = a_2 = 50$ нм), $\alpha = 2.48$, всі нитки знаходяться в одній площині і на однаковій відстані одна від одної). Як можна бачити, ця помилка експоненціально зменшується зі зростанням N.

Переконавшись в тому, що розроблений обчислювальний інструмент

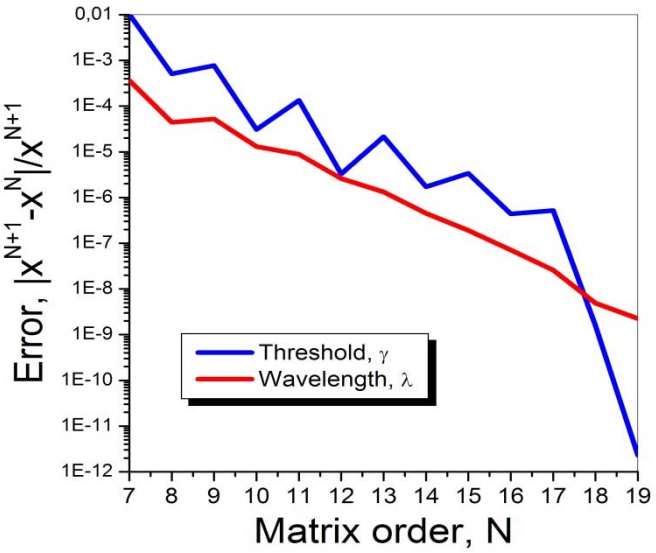


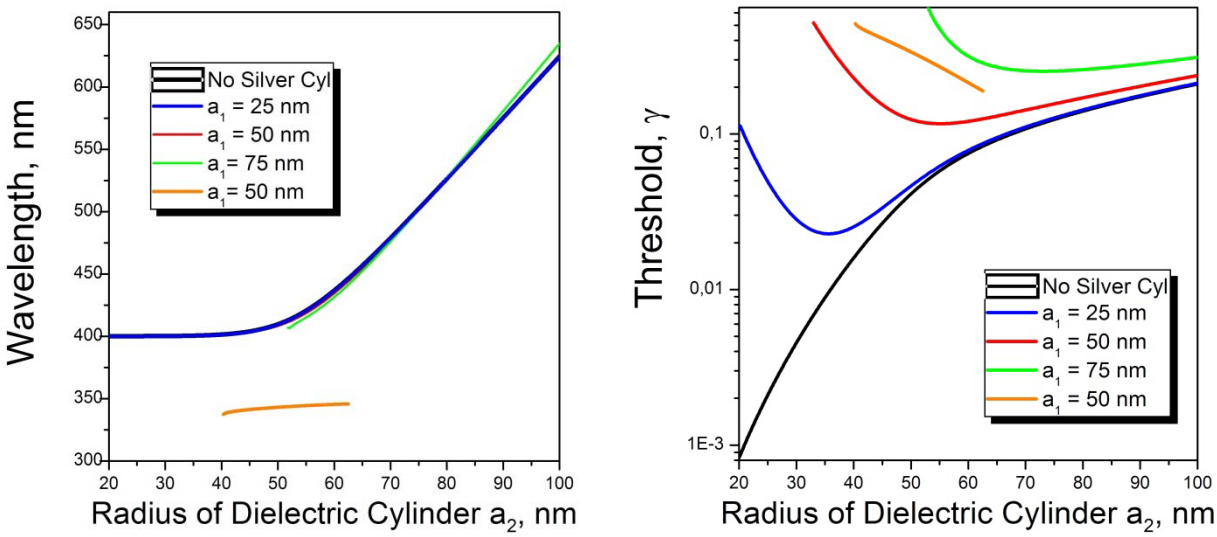
Рис. 4.12. Обчислювальна помилка в залежності від порядку усічення матриці *N* при розрахунку власного значення лазерної завдання для першої граткової моди для такої ж решітки, що і на Рiс.4.11.

забезпечує збіжність і, отже, контрольовану точність розрахунків, можна застосувати його до аналізу розглянутого лазера з періодичним відкритим резонатором.

Графіки на Рис. 4.13 демонструють динаміку власних значень лазерної завдання для бінарної решітки при зміні розмірів активної зони, яка характеризується в даному випадку просто радіусом квантових ниток. Представлені залежності довжин хвиль і порогів випромінювання для п'яти різних конфігурацій і двох різних лазерних мод: граткової і плазмонної.

Перша конфігурація відповідає випадку, коли в решітці відсутні срібні нанонитки ($a_1 = 0$), тобто вона складена тільки з квантових ниток під накачуванням. В такому випадку власна довжина хвилі і поріг граткової моди поводяться певним чином - див. Розділ 3. При фіксованому періоді решітки та зменшенні радіуса квантової нитки, власна довжина хвилі прагне до значення, рівного періоду, а відповідний поріг убуває до нуля.

Наступні три конфігурації відповідають бінарної решітці з трьома різними фіксованими значеннями радіусу срібною нанонитки: $a_1 = 25\,\text{нм}$,



(а) (б)

Рис. 4.13. Власні довжини хвиль (а) і пороги самозбудження (б) лазерних мод бінарної решітки з періодом в залежності від радіуса квантової нитки a_2. Срібна нитка розташована в точці $r_1 = 100\,\text{nm}$, $\phi_1 = 0$ і має радіус $a_1 = 50\,\text{nm}$. Квантова нитка з показником заломлення $\alpha = 2.48$ розташована в, $r_2 = 100\,\text{nm}$, $\phi_1 = \pi$.

$a_1 = 50$ нм і $a_1 = 75$ нм. На малюнках показано, як змінюються довжина хвилі і поріг граткової моди в бінарній решітці в залежності від радіуса квантової нитки. Можна побачити, що їх довжини хвиль збігаються з точністю до декількох нанометрів; крім того, вони збігаються з довжиною хвилі граткової моди для решітки з квантових ниток (тобто без металевих нанониток). Це свідчить про те, що ми досліджуємо одну і ту ж лазерну моду в різних конфігураціях решітки, причому можна впевнено говорити, що тут мова йде про граткові моди. Слід окремо зазначити, що, виходячи з поведінки власної довжини хвилі, можна зробити висновок, що в даному випадку присутність плазмонів складової в решітці і плазмонного власного значення дуже мало впливає на довжину хвилі випромінювання граткової моди.

Разом з тим, пороги самозбудження граткової моди поводяться досить різним чином при наявності і за відсутності срібних нанониток. Для відносно великих значень радіуса квантової нитки ($a_1 > a_2$) поріг граткової моди в бінарній решітці близький до порога решітки з квантових ниток, причому, чим тонше срібна нитка, і, відповідно, чим менше поглинання, тим ці величини ближче. Якщо ж радіус квантової нитки зменшується далі, то поріг граткової моди досягає деякого мінімуму приблизно при збігу радіусів квантової і срібною ниток, $a_1 \approx a_2$.

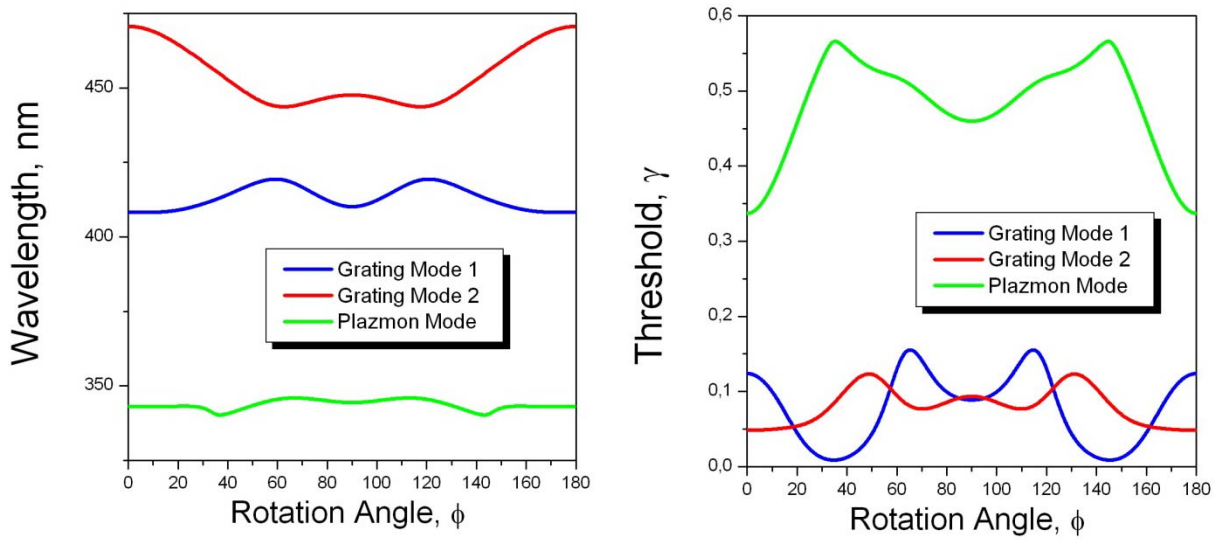
Таку поведінку можна пояснити тим, що при $a_1 < a_2$ поглинання в срібної нитки вже не може бути зрівноваженно генерацією поля у замалий активній зоні.

Нарешті, остання пара кривих на Рис. 4. 13 (а) і (б) відповідає плазмонній моді бінарної решітки, для якої довжина хвилі близька до того ж значенню в 340 нм, що і для одиночної срібною нанонитки кругового перетину. При цьому відповідні лазерні власні значення стійко перебувають, тільки якщо радіус квантової нитки $40\text{ нм} < a_1 < 60\text{ нм}$. Якщо уважно розглянути область цих значень a_1 для задачі розсіювання на Рис. 4.10 (а), то

можна помітити, що тут резонанс на плазмонів моді має відносно високу інтенсивність. Можна припустити, що це пояснюється параметричних взаємодією з власною модою діелектричної нитки (пологий «хребет», що виходить із лівого нижнього кута малюнка).

В цілому, матеріальний поріг самозбудження плазмонів моди бінарної решітки з нанониток однакового радіуса буде вищою, ніж поріг граткової моди, що не є очевидним результатом. Для більш детального вивчення, повернемося до експерименту, в якому радіуси квантових і срібних ниток рівні і фіксовані, $a_1 = a_2 = 50\,\text{нм}$, відстані їх осей від центру координат в осередку є рівними $r_1 = r_2 = 100\,\text{нм}$, але кут повороту положення осей ниток змінюється. Результати розрахунку лазерних власних значень наведені на Рис. 4.14. Ці графіки корисно порівнювати з відповідними результатами для розсіювання плоскої хвилі для такої моделі, поданими у вигляді рельєфів коефіцієнтів відбиття і поглинання див. Рис. 4.11.

Власні частоти однозначно показують приналежність тієї чи іншої моди до граткового або плазмонного типу: граткові мають довжини хвиль, дещо більші періоду структури, $\lambda > p = 400\,\text{нм}$, а плазмонів зберігає



(а) (б)

Рис. 4.14. Власні довжини хвиль (а) і пороги самозбудження (б) лазерних мод в залежності від кута повороту срібних і квантових ниток для такої ж бінарної решітки з $p = 400\,\text{нм}$ і $a_1 = a_2 = 50\,\text{нм}$, як і на Рис. 4.10.

довжину хвилі $\lambda \approx 340$ нм при всіх кутах повороту. Відзначимо, що всі власні частоти при повороті ниток поводяться так само, як і яскраві «хребти» підвищеного відображення і поглинання на відповідних рельєфах на Рис. 4.11.

Поріг самозбудження першої граткової моди має локальний мінімум при куті повороту $\phi = \pi / 2$, хоча глобальний мінімум спостерігається при несиметричному розташуванні ниток. Можна припустити, що це пов'язано зі структурою власного поля граткової моди, і при такому розташуванні ниток срібна нитка потрапить в зону високої інтенсивності *E*-поля цієї моди. Варто відзначити, що максимуми довжини хвилі і порога для першої моди відповідають мінімумам для другої моди і навпаки, що пов'язано, мабуть, з властивостями симетрії полів даних мод.

Найбільш цікавим є поведінка порога самозбудження плазмонів моди. Він перевершують поріг першої граткової моди в десятки разів (точніше, від 3 до 60 разів). Згідно з результатами розділу 1, поріг випромінювання лазера стає нижче, якщо активна зона потрапляє в область сильного електричного поля робочої лазерної моди. В даному випадку ми маємо справу з плазмонів модою одиночній срібною нанонитки, а активна зона - це квантова нитка. Відомо, що для кругової нитки найбільшу роль відіграє дипольна плазмонна мода з азимутним індексом $|n|=1$, максимуми *E*-поля якої знаходяться в площині решітки. Тому в разі $\phi = 0, 180^o$, коли квантові нитки розташовані між срібними нитками, досягається мінімум порога плазмонів моди.

4.4 Решітка з двошарового нанонитки

Ще однією цікавою для лазерних додатків конфігурацією є решітка з двошарових нанониток, в якій внутрішня металева нитка покрита концентричною круговою оболонкою з діелектрика. Якщо діелектрик володіє посиленням, то така форма активної зони може виявитися більш виграшній, з точки зору зниження порога, для плазмонних мод нанонитки.

Розглянемо решітку, що складається з паралельних осі Z і періодично розташованих уздовж осі X двошарових кругових циліндрів - див. Рис. 4.15. Нехай період даної структури дорівнює p, двошаровий циліндр складається з ядра з радіусом a_1 і коефіцієнтом заломлення ν_1 і оболонки з радіусом a_2 і коефіцієнтом заломлення ν_2.

Для побудови рішення задачі розсіювання плоскої хвилі на подібній решітці і задачі знаходження лазерних власних значень можна використовувати операційний метод, однак при цьому необхідно вивести модифіковану матрицю розсіювання T, що відповідає цій геометрії. Для цього необхідно вирішити задачу розсіювання плоскої хвилі на такому одному двошаровому циліндрі. Застосовуючи метод поділу змінних, після підстановки в граничні умови компонент електричного і магнітного полів у вигляді рядів Фур'є по азимутним експонентам, приходимо до наступних виразів:

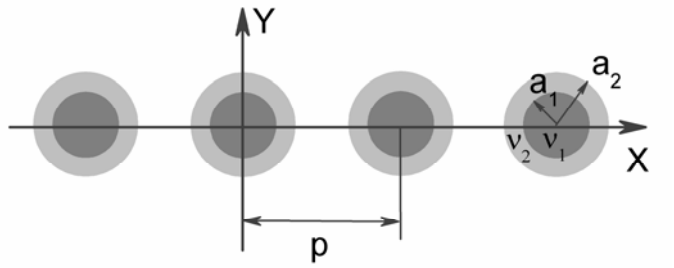


Рис. 4.15. Поперечний переріз решітки з двошарових кругових циліндрів

$$T = \left[-\frac{\nu_1^{-1} J_m(ka_1) A_m - J'_m(ka_1) B_m}{\nu_1^{-1} H_m(ka_1) A_m - H'_m(ka_1) B_m} \delta_n^m \right], \qquad (4.4.1)$$

де

$$A_m = J'_m(k\nu_1 a_1) - t_m H'_m(k\nu_1 a_1), \quad B_m = J_m(k\nu_1 a_1) - t_m H_m(k\nu_1 a_1), \qquad (4.4.2)$$

$$t_m = \frac{\nu_2^{-1} J_m(k\nu_1 a_2) J'_m(k\nu_2 a_2) - J'_m(k\nu_1 a_2) J_m(k\nu_2 a_2)}{\nu_2^{-1} H_m(k\nu_1 a_2) J'_m(k\nu_2 a_2) - H'_m(k\nu_1 a_2) J_m(k\nu_2 a_2)}. \qquad (4.4.2)$$

Для чисельного експерименту виберемо грати з періодом $p = 400$ нм, що складається з двошарових нанониток з радіусом внутрішньої срібної нитки a_1, що змінюються в межах від 20 нм до 100 нм. Радіус діелектричної оболонки при цьому зберігається постійним і рівним 120 нм, а її коефіцієнт заломлення вважається рівним $\nu_2 = 1.4142$.

На рис.4.16 зображені рельєфи коефіцієнтів відбиття (а) і поглинання (б) *H*-полярізованной плоскої хвилі для такої решітки. Ці результати корисно порівнювати з такими ж величинами для решітки зі срібних нанониток без

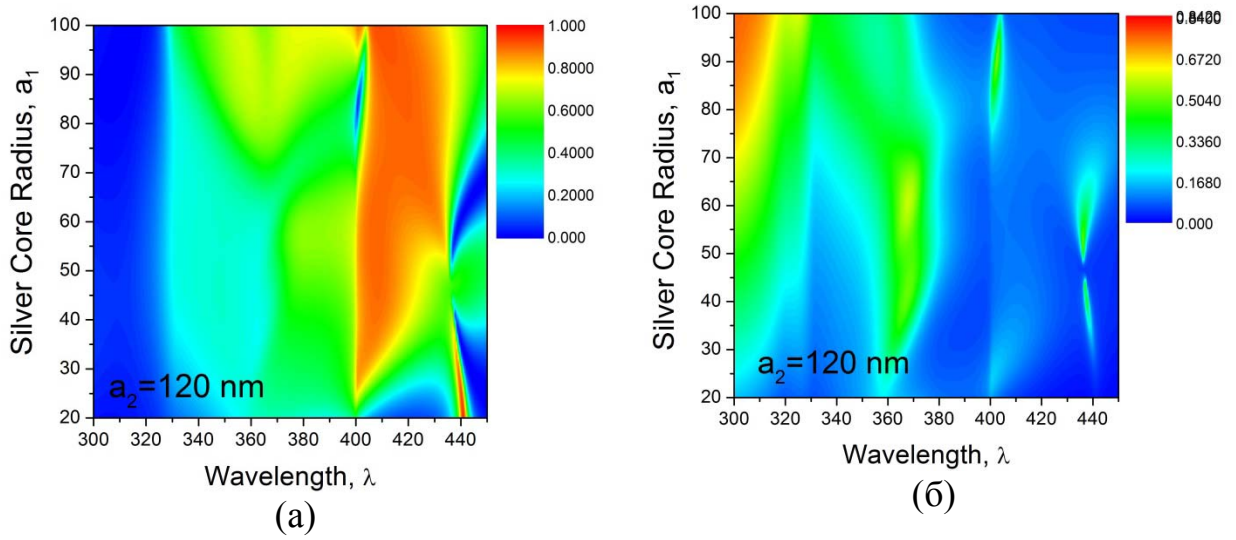


Рис 4.16. Рельєфи коефіцієнтів відбиття (а) і поглинання (б) *H*-поляризованої плоскої хвилі для решітки з двошарових нанониток з періодом $p = 400$ нм в залежності від довжини хвилі і радіусу срібного ядра a_1; радіус діелектричної оболонки дорівнює 120 нм, а її показник заломлення $\alpha_2 = 1.4142$..

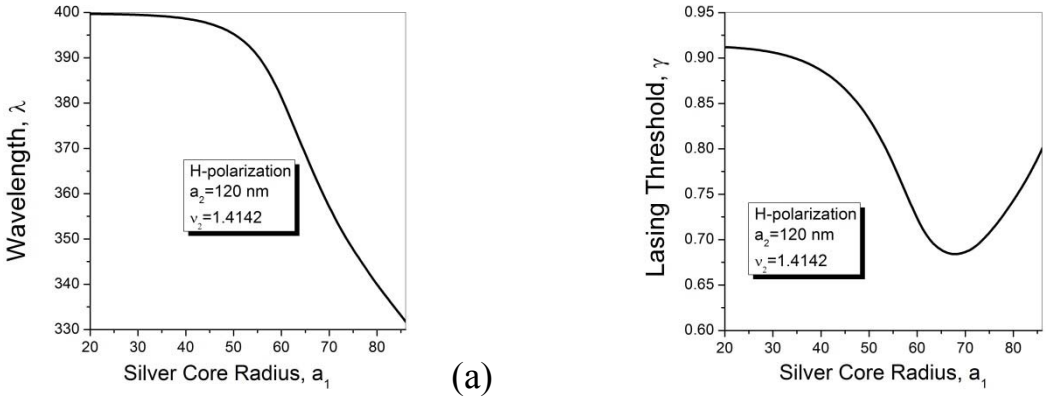


Рис. 4.17. Власні довжини хвиль (а) і пороги самозбудження (б) лазерних мод в залежності від радіуса срібних ниток для такої ж решітки, як і на Рис. 4.16.

діелектричного покриття, які були вивчені в підрозділі 4.2 та представлені на панелях (б) і (г), відповідно.

Як можна бачити, рельєф коефіцієнта відображення показує значну залежність довжини хвилі плазмонного резонансу від наявності оболонки. Ця довжина хвилі завжди зрушена в бік більш довгих хвиль, ніж для срібної нанонити у вільному просторі. Точна величина зсуву залежить від коефіцієнта заломлення оболонки і її товщини. Коефіцієнт поглинання залежить від цього значно менше.

Альтернативний і більш загальний спосіб побудови матриці відображення від шаруватого циліндра полягає в побудові матриць розсіювання від стінок діелектричного циліндра циліндричної хвилі, падаючої зовні і зсередини його.

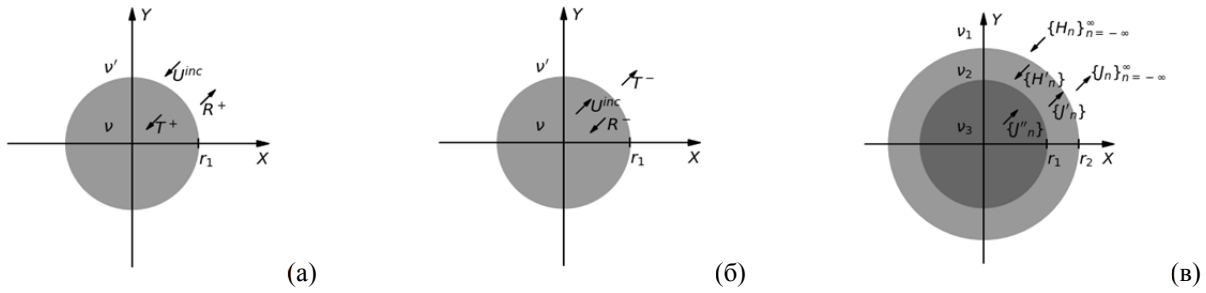


Рис. 4.18. Поперечний переріз одношарового циліндра з полем, падаючим зовні (а) і з всередині (б), а також двошарового циліндра (в)

В цьому випадку матриці розсіювання для падаючого ззовні поля мають вигляд

$$R^{+}=\left[\frac{-\alpha^{-1}J_m(k\nu' r_1)J'_m(k\nu r_1)-J'_m(k\nu' r_1)J_m(k\nu r_1)}{\alpha^{-1}H_m(k\nu' r_1)J'_m(k\nu r_1)-H'_m(k\nu' r_1)J_m(k\nu r_1)}\delta_n^m\right] \tag{4.4.3}$$

$$T^{+}=\left[\frac{J_m(k\nu' r_1)J'_m(k\nu r_1)-J_m(k\nu r_1)J'_m(k\nu r_1)}{\alpha^{-1}H_m(k\nu' r_1)J'_m(k\nu r_1)-H'_m(k\nu' r_1)J_m(k\nu r_1)}\delta_n^m\right], \tag{4.4.4}$$

і для падаючого зсередини поля,

$$R^{-}=\left[\frac{\alpha H_m(k\nu r_1)H'_m(k\nu' r_1)-H'_m(k\nu r_1)H_m(k\nu' r_1)}{\alpha J_m(k\nu r_1)H'_m(k\nu' r_1)-J'_m(k\nu r_1)H_m(k\nu' r_1)}\delta_n^m\right], \tag{4.4.5}$$

$$T^{-}=\left[\frac{H'_m(k\nu r_1)J_m(k\nu r_1)-H_m(k\nu r_1)J'_m(k\nu r_1)}{\alpha J_m(k\nu r_1)H'_m(k\nu' r_1)-J'_m(k\nu r_1)H_m(k\nu' r_1)}\delta_n^m\right]. \tag{4.4.6}$$

Тоді, зіставляючи поле, падаюче на двошаровий циліндр (Рис. 4.18, (б)), з полями всередині кожного шару, можна прийти до наступного виразу для матриці відображення хвилі від двошарового циліндра:

$$T=R_1^{+}+T_1^{-}\beta(r_1-r_2)R_2^{+}\beta(r_2-r_1)M^{-1}T_1^{+}, \tag{4.4.7}$$

де

$$M=I-R_1^{-}\beta(r_1-r_2)R_2^{+}\beta(r_2-r_1). \tag{4.4.8}$$

В попередніх розділах значну увагу було приділено вивченню характеристик решіток в залежності від відстані між нанонитками, у цій геометрії ми проведемо подібне дослідження. Розглянемо такі грати з періодом $p=400$ нм і співвідношеннями радіусів $a_2=2a_1$. Будемо вважати, що внутрішня область - срібна, а зовнішня складається з діелектричного матеріалу з коефіцієнтом заломлення $\alpha_2=1.3$. На Рис. 4.19 представлені

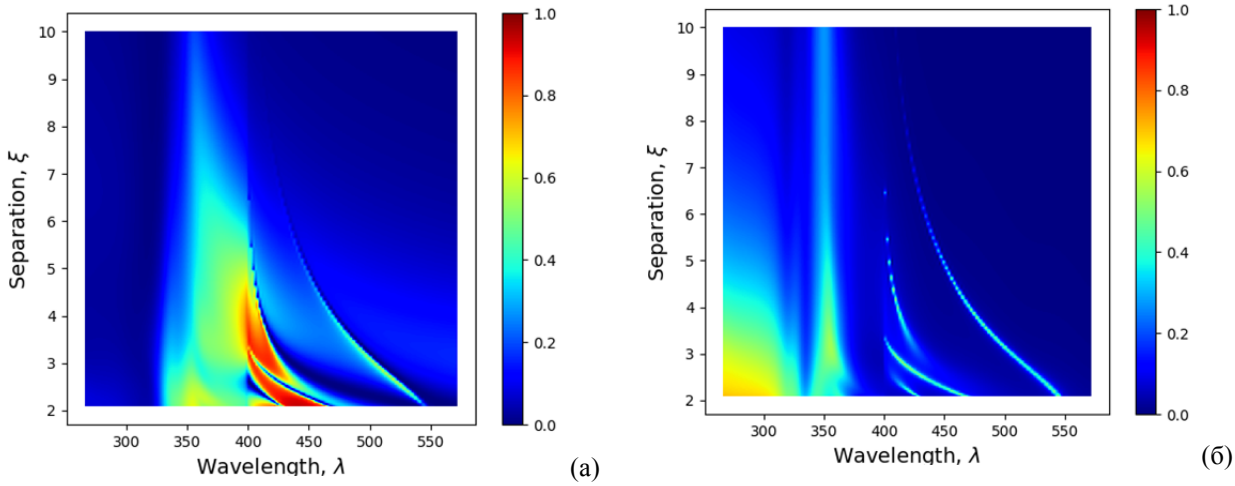


Рис. 4.19 Рельєфи коефіцієнтів відбиття (а) і поглинання (б) *H*-поляризованої плоскої хвилі на решітці з двошарових нанониток з періодом $p = 400$ нм, співвідношенням радіусів $a_2 = 2a_1$ і показник заломлення оболонки $\alpha_2 = 1.3$ в залежності від довжини хвилі і відносного відстані $\xi = p / a_1$.

рельєфи модуля коефіцієнта відбиття (а) та поглинання (б) плоскою хвилі, що падає нормально в *H*-поляризації в залежності від довжини хвилі і періоду решітки. Можна бачити, що плазмонний резонанс на довжині хвилі $\lambda \approx 360$ нм, причому ця довжина хвилі залишається такою ж для різних значень відносного відстані $\xi = p / a_1$. Інша група резонансів спостерігається при $\lambda > 400$ нм, ці резонанси при $\xi \to \infty$ прагнуть до довжини хвилі, рівної періоду решітки, $\lambda = p = 400$ нм. Ці резонанси є граткові і поводяться так само, як і в раніше досліджених випадках. Всього на Рис. 4.19 можна бачити чотири «хребта», які відповідатимуть чотирьом різним гратковим резонансам. Кожен з них характеризується певною симетрією або антисиметрії щодо осей X і Y.

Результати дослідження лазерної завдання для такої решітки представлені на Рис. 4.20, де показані графіки залежностей власних значень від ξ двох плазмонних мод і однієї граткової моди. Як і в інших подібних випадках, власна частота граткової моди в лазерної задачі (Рис. 4.20 (верхня панель)) і резонансна частота в задачі дифракції (Рис. 4.19 (а)) збігаються. На

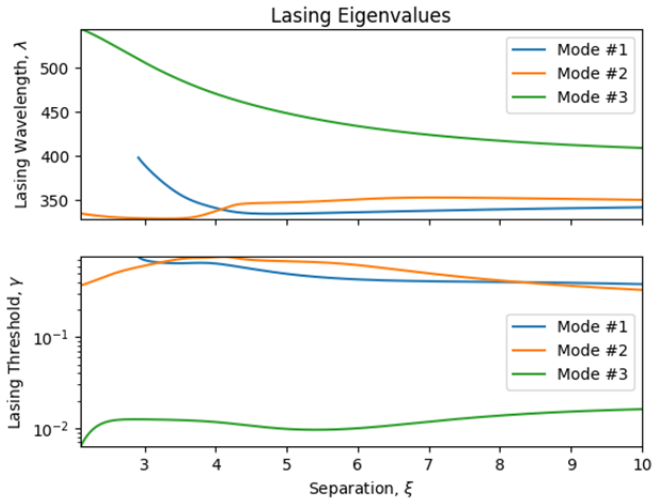


Рис. 4.20 Собственные длины волн (сверху) и пороги излучения (снизу) лазерных мод в зависимости от радиуса серебряных цилиндров для такой же решетки, как и на Рис. 4.16.

відміну від цього, власні частоти плазмонних мод (2 і 3) лежать в широкому хребти плазмонного резонансу на Рис. 4.19. Зіставлення порогів самозбудження граткових і плазмонних мод показує, що поріг граткової моди на два порядки нижче, ніж у плазмонних мод.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

В даному розділі була докладно розглянута задача дифракції на решітці з срібних ниток у вільному просторі, а також завдання розсіювання і ЛЗВЗ для бінарної решітки, що складається з квантових і срібних нанониток. Додатково досліджувалася решітка, що складається з двошарових ниток з срібним ядром. За результатами досліджень, опублікованих в статтях [4-5,7-8] і в працях конференцій [55, 28, 31-32, 34-35, 41, 48], можна зробити наступні висновки:

1. Періодичні решітки з срібних нанониток мають граткові і плазмонні моди. Перші пов'язані з періодичністю решітки, останні з дисперсійними властивостями матеріалу нитки. Спільне існування двох типів мод формує смугу високого відбиття між плазмонної частотою і довжиною хвилі, що дорівнює періоду решітки.

2. У лазерної задачі для бінарної решітки, що складається з квантових і срібних нанониток, знайдені пороги самозбудження для плазмонної і граткової мод і показано, що перший значно вище другого. При цьому значення порогів сильно залежать від взаємного положення ниток на періоді решітки.

3. Знайдено пороги і частоти самозбудження мод решітки, що складається з двошарових нанониток, де срібне ядро покрите шаром активного матеріалу. У такій решітці також присутні граткових і плазмонів моди. Виявлено дві плазмонів моди, які мають близькі пороги самозбудження, але їх величини значно вище, ніж у граткової моди.

РОЗДІЛ 5
МОДИ РЕШІТОК З НИТОК В ПЛОСКОСЛОІСТОЙ СЕРЕДОВИЩІ

В даному розділі розглядаються моди періодичних відкритих резонаторів, до складу яких спільно входить елементи, що випромінюють в розділах 2, 3 і 4, тобто, плоскі шари діелектриків і решітки з діелектричних, металевих і квантових нанониток. Інтерес до подібних резонаторам обумовлений тим, що в мікро і нано оптиці періодичні структури зазвичай виготовляються на плоских підкладках або в плоских шарах діелектриків або напівпровідників.

Хід дослідження йде за тією ж схемою, яка була раніше використана в розділах 2-4: спочатку розглядається задача розсіювання плоскої оптичної хвилі на відповідній структурі, а потім вивчається задача на лазерні власні значення (частоту і поріг випромінювання) при введенні посилення в матеріал із складових частин - періодичного резонатора.

5.1 Метод операторів для шаруватих структур з решіткою

Розглянемо спосіб побудови матриці розсіювання для шаруватої структури з можливими включеннями решіток з нескінченних діелектричних або срібних ниток. Для простоти, розглянемо діелектричну шарувату структуру, що складається з N діелектричних шарів з показниками заломлення v_j товщини d_j. Кожен шар лежить в площині X,Z. В першу чергу випишемо матриці Френеля для плоского границі між двома діелектриками з коефіцієнтами заломлення v_1 і v_2 для пучка гармонік $e^{-i\tau_s' ky}$ Флоке, тут знак «+» позначає, що хвиля поширюються з півпростору з показником заломлення v_2 у v_1, а знак «-» - зустрічна хвиля. Тоді,

$$R^- = \left\{ \frac{1 - v_1\tau_s' / v_2\tau_s''}{1 + v_1\tau_s' / v_2\tau_s''} \delta_{k,s} \right\}_{k,s=-N}^{N}, \tag{5.1.1}$$

$$T^- = \left\{ \frac{2}{1 + v_1\tau_s' / v_2\tau_s''} \delta_{k,s} \right\}_{k,s=-N}^{N}, \tag{5.1.2}$$

$$R^+ = \left\{ \frac{1 - v_2\tau_s'' / v_1\tau_s'}{1 + v_2\tau_s'' / v_1\tau_s'} \delta_{k,s} \right\}_{k,s=-N}^{N}, \tag{5.1.3}$$

$$T^+ = \left\{ \frac{2}{1 + v_2\tau_s'' / v_1\tau_s'} \delta_{k,s} \right\}_{k,s=-N}^{N}, \tag{5.1.4}$$

де

$$\tau_s'(\sigma) = \sqrt{1 - \pi_s^2 / v_1^2}, \qquad \tau_s''(\sigma) = \sqrt{1 - \pi_s^2 / v_2^2}, \qquad \pi_s = n/\sigma \tag{5.1.5}$$

Тепер випишемо гармоніки Флоке у j-й границі, які у верхній півплощині приймають такий вигляд:

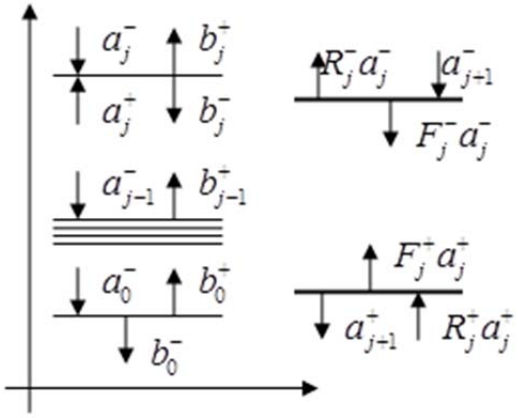


Рис. 5.1 Гармоніки Флоке і матриці Френеля для плоскошаруватой структури.

$$a_j^- = \left\{ a_{j,l}^- e^{-i\tau_l'\kappa y + i\pi_l kx} \right\}_{l=-N}^{N}, \quad b_j^+ = \left\{ b_{j,l}^+ e^{i\tau_l'\kappa y + i\pi_l kx} \right\}_{l=-N}^{N} \tag{5.1.6}$$

і в нижній

$$a_j^+ = \left\{ a_{j,l}^+ e^{i\tau_l''\kappa y + i\pi_l kx} \right\}_{l=-N}^{N} \quad b_j^- = \left\{ b_{j,l}^- e^{i\tau_l''\kappa y + i\pi_l kx} \right\}_{l=-N}^{N} -,. \tag{5.1.7}$$

Якщо j-я межа описується матрицями Френеля R_j^-, F_j^- для хвилі a_j^- падаючої зверху і R_j^+, F_j^+ для хвилі b_j^+, що падає згори то тоді співвідношення гармонік матиме вигляд:

$$\begin{aligned} b_j^- &= R_j^- a_j^- + F_j^+ b_j^+ \\ a_j^+ &= R_j^+ b_j^+ + F_j^- a_j^- \end{aligned}. \tag{5.1.8}$$

Тоді матриця переходу для хвилі, що падає на границю знизу і зверху може бути приведена до вигляду,

$$\begin{pmatrix} a_j^- \\ b_j^+ \end{pmatrix} = B(\nu_1, \nu_2) \begin{pmatrix} a_j^+ \\ b_j^- \end{pmatrix}, \tag{5.1.9}$$

де

$$B(\nu_1,\nu_2)=\begin{pmatrix} (F_j^-)^{-1}R_j^+ & (F_j^-)^{-1} \\ F_j^+ + R_j^-(F_j^-)^{-1}R_j^+ & R_j^-(F_j^-)^{-1} \end{pmatrix} \tag{5.1.10}$$

Така матриця повністю описує перетворення падаючої гармоніки в гармоніки Флоке, що проходять, на плоскій границі розділу, але якщо взяти замість границю розділу двох діелектриків решітку, то можна провести подібні висновки і побудувати подібну матрицю перетворення поля на решітці. Оскільки решітки з кругових ниток симетрична щодо своєї площині, то коефіцієнти відображення хвилі, що приходить з верхньої та нижньої півплощини, рівні між собою, $R^+ = R^- = R$ і, $T^+ = T^- = F$ причому,

$$G=\begin{pmatrix} (F)^{-1}R & (F)^{-1} \\ F + R(F)^{-1}R & R(F)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{5.1.11}$$

де G - матриця переходу через решітку в діелектричній середовищі. Вона залежить від коефіцієнта заломлення середовища, періоду решітки та матеріалу, з якого складаються її нитки.

Матриця проходження плоскої хвилі через однорідний діелектричний шар товщиною d_i має наступний вигляд:

$$S(d,\nu)=\begin{pmatrix} S^+ & 0 \\ 0 & S^- \end{pmatrix}, \tag{5.1.12}$$

де квадратні блоки $S^{\pm}$ залежать від частоти, показника заломлення середовища і товщини шару,

$$S^{\pm}(\nu,d)=\{e^{\pm ik\tau_s\nu d}\} \tag{5.1.13}$$

Шляхом множення матриць виду (5.1.10) - (5.1.13), в залежності від структури, можна отримати квадратну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} A^{IV} & A^{I} \\ A^{III} & A^{II} \end{pmatrix} \tag{5.1.14}$$

Розглянемо падіння плоскої хвилі на подібну структуру, тоді

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a^{incident} \\ r \end{pmatrix}, \tag{5.1.15}$$

де $a^{incident} = \left\{ (-1)^l e^{-i\tau_l \kappa y + i\pi_l kx} \right\}_{l=-N}^{N}$.

Тепер можна отримати коефіцієнти відображення

$$R(\sigma) = \sum_{|i|<\sigma} \tau_i \left| r_i \right|^2 \tag{5.1.16}$$

і проходження,

$$T(\sigma) = \sum_{|i|<\sigma} \tau_i \left| \delta_i^0 + t_i \right|^2, \tag{5.1.17}$$

де r і t - амплітуди гармонік Флоке відбитого і минулого поля, відповідно, обчислені за допомогою наступних формул:

$$r = -(A^{IV})^{-1} A^{III} a^{incident}, \tag{5.1.18}$$

$$t = A^{I} a^{incident} + A^{II} r. \tag{5.1.19}$$

У випадку вивчення лазерної завдання, падаюче поле відсутнє, і тоді

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \tag{5.1.20}$$

або

$$\det(A^{IV}) = 0, \tag{5.1.21}$$

це детермінантне рівняння буде використовуватися для знаходження власних значень.

5.2 Решітка з кругових ниток у діелектричному шарі

Розглянемо діелектричний шар, що лежить в площині XoZ з показником заломлення α_s товщини $d = d_1 + d_2 + 2a$. У середині цього шару знаходиться решітка з кругових ниток на відстанях d_1 і d_2 від нижньої і верхньої межі, відповідно. Період решітки дорівнює p, кожна нитки має радіус, що дорівнює a, і коефіцієнт заломлення - α.

Побудова матриці розсіювання для такого шару вимогає множення п'яти матриць,

$$A = B^1 S^1 G S^2 B^2, \tag{5.2.1}$$

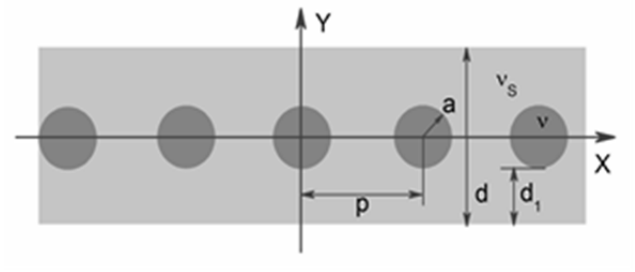


Рис. 5.2 Поперечний переріз діелектричного шару з граткою з кругових ниток

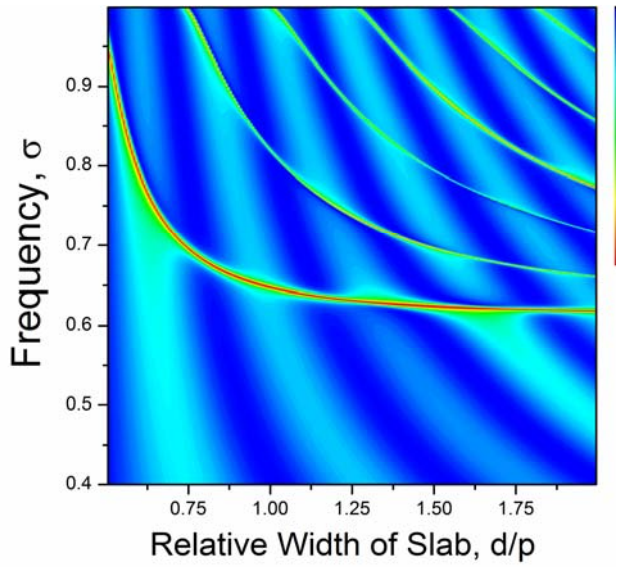
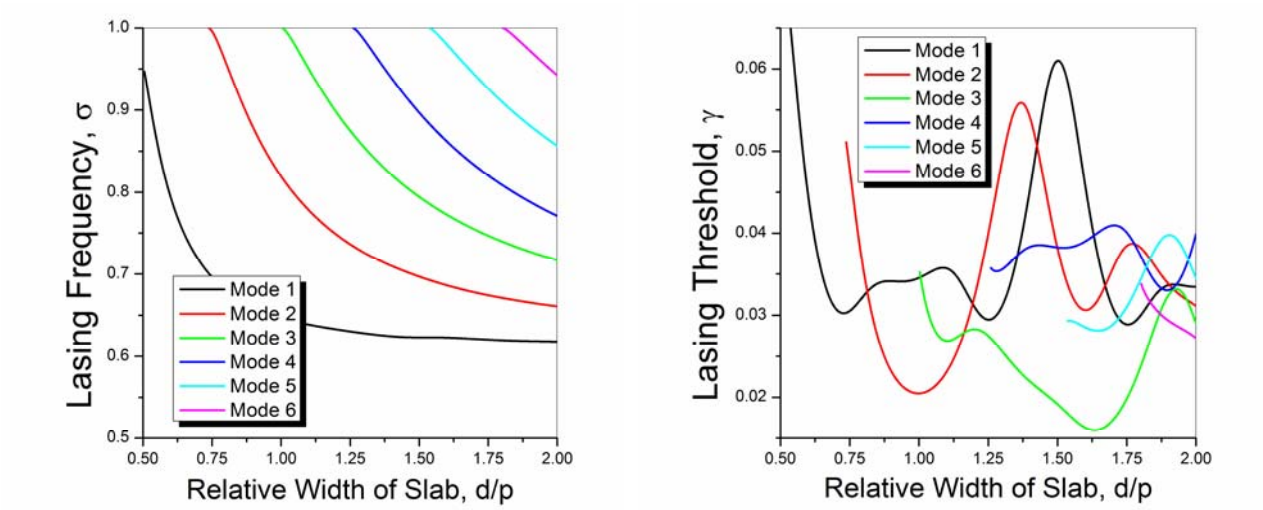


Рис. 5.3 Рельєф коефіцієнта відбиття *E*-поляризованої плоскої хвилі для діелектричного шару з показником заломлення $\alpha_S = 1.6$ з гратами з ниток з показником заломлення $\alpha = 2$ період $p = 4a$, на поле нормованої товщини шару і нормованої частоти.

де B^1 - матриця переходу через кордон розділу двох діелектриків від 1 до α_s, S^1 - матриця переходу на відстань d_1, G - матриця переходу через решітку з ниток показником заломлення ν_s і періодом p, що знаходяться в середовищі з показником заломлення α, S^2 - матриця переходу на відстань d_2, B^2 матриця переходу через кордон розділу двох діелектриків від α_s до 1.

Для початку проведемо аналіз поведінки електромагнітних властивостей такого періодично структурованого шару в залежності від ширини цього шару. На Рис. 5.3 показаний рельєф модуля коефіцієнта відображення нормально падаючої плоскої хвилі в *E*-полярізаціі в залежності від ставлення d/p і нормованої на період частоти σ. При цьому період структури дорівнює чотирьом радіусів або $p = 4a$. Показник заломлення шару $\alpha_s = 1.6$ і ниток $\alpha = 2.0$. Значення відношення d/p варіюється в межах



(а) (б)

Рис. 5.4 Власні частоти (а) і пороги самозбудження (б) для граткових мод діелектричного шару з показником заломлення $\alpha_S = 1.6$ з гратами з квантових ниток з $\nu = 2 - i\gamma$ і періодом $p = 4a$ в залежності від нормованої товщини шару. *E*-поляризація.

$[0.51\ldots2.0]$. Його найменше значення відповідає випадку, коли товщина шару лише трохи перевершує діаметр нитки, а найбільше значення відповідає випадку $d = 2p = 8a$. На цьому рельєфі видно два види упорядкованих резонансів. Перші - пологі хвилеподібні хребти. Це резонанси на модах діелектричного шару. Менш очевидні резонанси - це шість яскраво виражених тонких хребтів при $\sigma > 0.6$. Це резонанси на граткових модах, і їх кількість узгоджується з виразами асимптот для даних мод, розглянутими в розділі 3.

Якщо розглянути лазерну завдання, помістивши «активність» в нитки решітки, то показник заломлення ниток решітки дорівнює $\nu_s = 2.0 - i\gamma$, де γ - поріг самозбудження. Його можна знайти разом з нормованою частотою за допомогою рівняння (5.1.21). Для ітераційного процесу, як і раніше, використовується метод Ньютона.

Початкові значення вибиралися в такий спосіб - при $d/p = 2$ частота вибиралася рівною частоті граткової в завданні розсіювання плоскої хвилі, а поріг вибирався рівним 0.1. Це наближення виявилося досить вдалим.

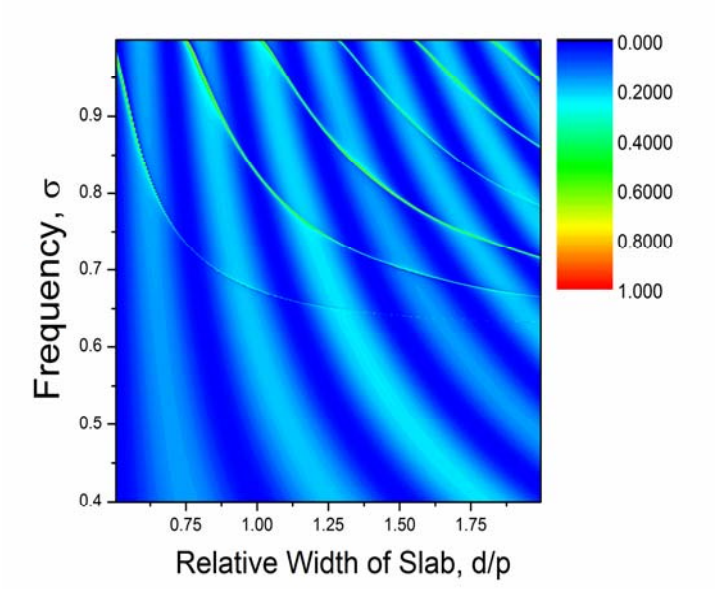
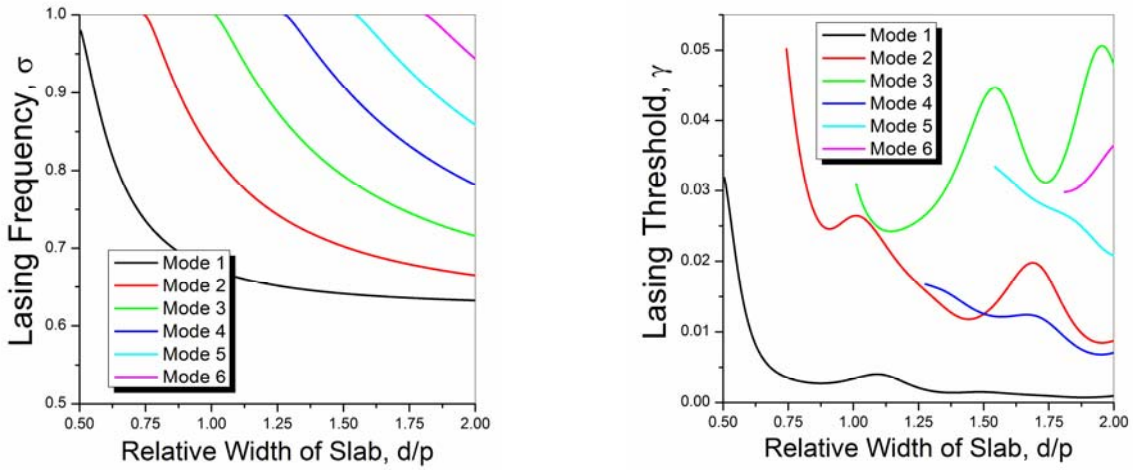


Рис. 5.5 Власні частоти (а) і пороги самозбудження (б) для граткових мод діелектричного шару з показником заломлення $\alpha_S = 1.6$ з гратами з квантових ниток з $\nu = 2 - i\gamma$ і періодом $p = 4a$ в залежності від нормованої товщини шару. *H*-поляризація.

На Рис. 5.4 зображені графіки залежностей власних частот і порогів випромінювання для граткових мод від нормованої товщини шару. Порівняння цих графіків з рельєфом на Рис. 5.2.2 показує хороший збіг власних і резонансних частот. Поведінка відповідних порогів показує, що для даної структури пороги можуть бути низькими. Крім того, варто зауважити, що локальні максимуми і мінімуми, на кривих порогів відповідають гіршому або кращему перекриттю полями моди з активною зоною.

Для *H*-полярізації було проведено аналогічне дослідження. Результати для задачі розсіювання представлені на Рис. 5.5. На цьому рельєфі видно, що резонанси на модах шару поводяться точно так же, як і в *E*-полярізації. Резонанси на граткових модах шару поводяться подібним чином з *E*-полярізацією, але їх хребти значно тонші. Слід зауважити, що в цій поляризації гібридизація між різними типами мод слабкіше, ніж у



(а) (б)

Рис. 5.6 Власні частоти (а) і пороги самозбудження (б) для граткових мод діелектричного шару з показником заломлення $\alpha_S = 1.6$ з гратами з квантових ниток з $\nu = 2 - i\gamma$ і періодом $p = 4a$ в залежності від нормованої товщини шару. *H*-поляризація.

попередній. Лазерна задача для *H*-полярізації досліджувалася аналогічним чином, як це було зроблено для *E*-полярізації. На Рiс.5.6 наведені залежності власних частот і порогів для граткових мод періодично структурованого діелектричного шару, відповідного Рис 5.5. При цьому, як і раніше, можна спостерігати гарний збіг власних резонансних частот. Значення порогів для граткових мод в *H*-полярізації нижче, ніж в *E*-полярізації. Мінімуми на графіках порогів відповідають таким випадкам, коли перекриття поля моди з актину зоною є найбільшим.

Тепер досліджуємо поведінки електромагнітних характеристики граткових мод в даній структурі в залежності від показника заломлення шару. Нехай показник заломлення шару дорівнює $\alpha = 2.0$, решітка розташована посередині шару $d_1 = d_2 = a$, а товщина шару дорівнює періоду: $d = p = 4a$. Будемо вважати, що показник заломлення шару α_s варіюється в межах $[1.0 \ldots 2.0]$. Тим самим моделюється варіація структури від випадку

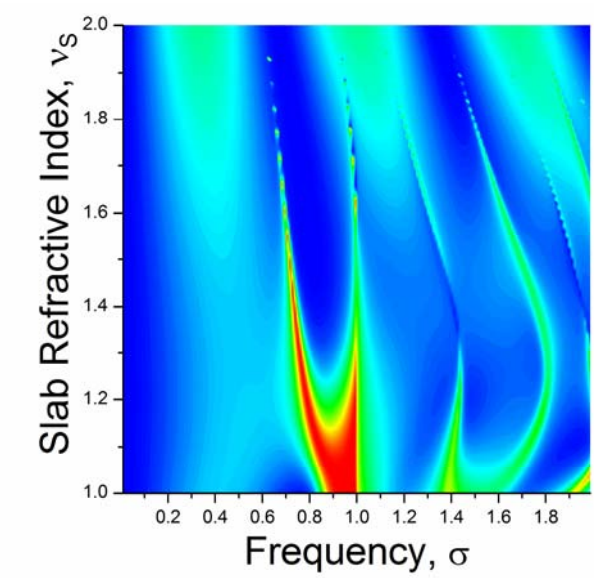
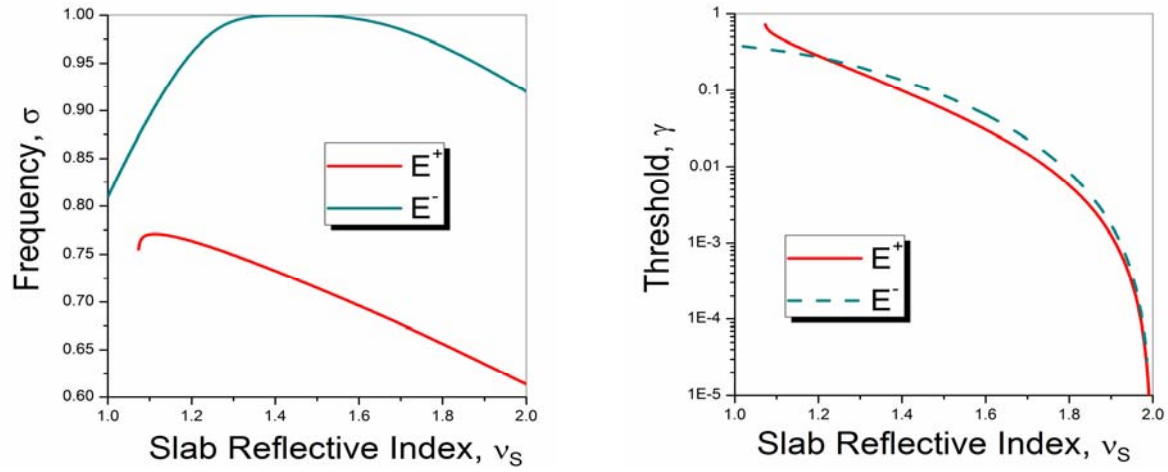


Рис 5.7 Рельєф коефіцієнту відбиття плоской нормальной хвилі від діелектричного шару зі змінним показником заломлення α_s містить решітку з діелектричних ниток $\alpha = 2$, відстанню до границь шару $d_1 = d_2 = a$ і рівними товщиною і періодом $d = p = 4a$, E-поляризація.

решітки з ниток знаходиться у вільному просторі ($\alpha_s = 1.0$) до випадку однорідного діелектричного шару з показником заломлення $\alpha_s = 2.0$. У всіх проміжних випадках ми маємо діелектричний шар з вбудованою решіткою, нитки якої мають показник заломлення вище, ніж у шару. На Рис. 5.7 і 5.9



(а) (б)

Рис. 5.8 Залежності частоти (а) і порога самозбудження (б) для двох граткових мод в такій структурі, як для Рис. 5.7

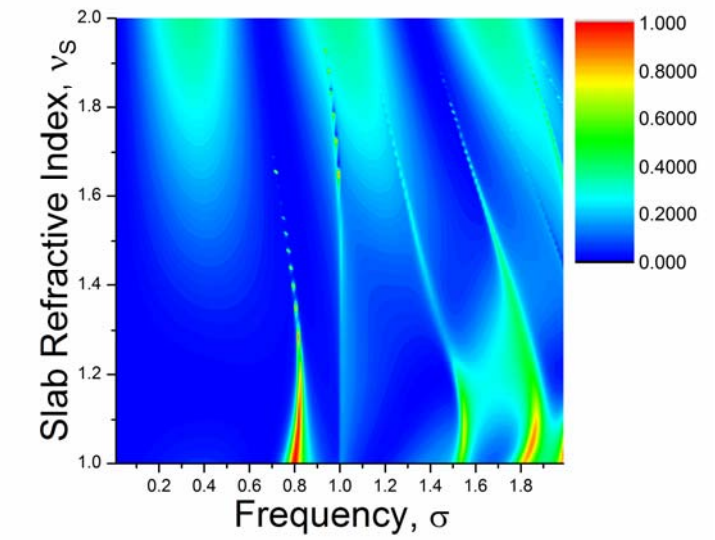
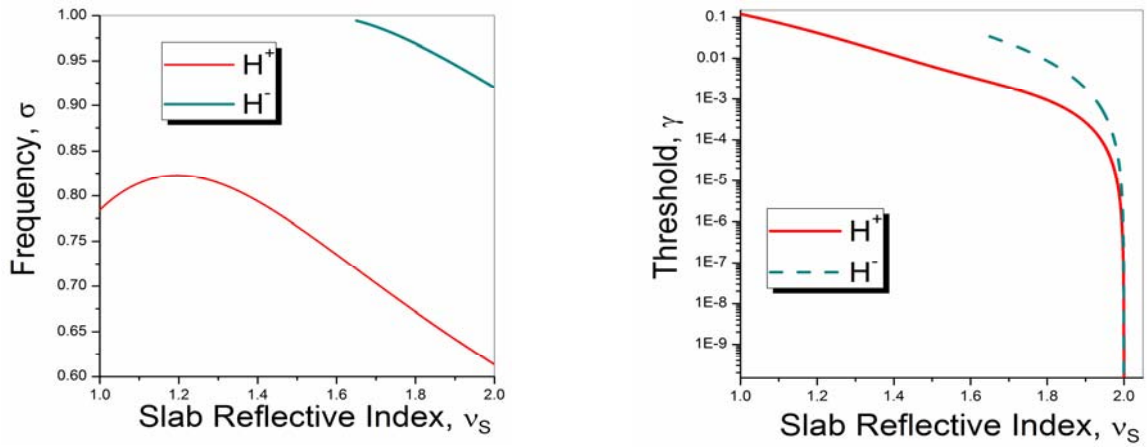


Рис. 5.9. Рельєф коефіцієнту відбиття плоской нормальной хвилі від діелектричного шару зі змінним показником заломлення α_s містить решітку з діелектричних ниток $\alpha = 2$, відстанню до границь шару $d_1 = d_2 = a$ і рівними товщиною і періодом $d = p = 4a$, H -поляризация.

зображені рельєфи коефіцієнта відбиття плоскої хвилі від такої структури в *E*-полярізаціі і *H*-полярізаціі, відповідно. Як було сказано вище, на цих малюнках верхня межа відповідає випадку однорідного шару. Зріз рельєфу уздовж цієї межі показує синусоидальное поведінка, яка не залежить від поляризації. Пологі хребти на рельєфі, що починаються тут, відповідають модам шару. Крім них можна бачити йдуть «знизу» резонанси на граткових



(а) (б)

Рис.5.10 Залежності частоти (а) і порога самозбудження (б) для двох граткових мод в такій структурі, як для Рис. 5.9

модах. Чим менше контраст між показником заломлення шару і ниток решітки, тим більш вузькими ці резонанси стають.

Залежності відповідних власних значень для граткових мод представлені на Рис. 5.8 і 5.10. Порівняння графіків власних частот показує гарне збігання з резонансними частотами в задачі розсіювання. Графіки порогів самозбудження показують, що при зменшенні значення між показниками заломлення решітки і шару, в якому вона знаходиться, поріг швидко падає. Цей факт узгоджується з результатами, представленими в розділі 3, де розглядалася решітка з квантових ниток у вільному просторі з малим показником заломлення.

Як випливає з теореми Пойнтінга (оптичної теореми), пороги самозбудження зменшуються, якщо активна зона знаходиться в області високої інтенсивності поля робочої моди. У розділі 2 був вивчений плоский діелектричний шар з активною зоною, затиснутий між двома відбивачами Брегга (DBR). Як було показано, якщо власна частота порога потрапить в смугу замикання, то, чим ближче до 1 коефіцієнт відображення DBR, тим нижче поріг випромінювання. Розглянемо діелектричний шар з показником заломлення $\alpha_C = 1.4$ і товщиною рівною періоду решітки, яка знаходиться в середині шару Рис. 5.11. Нехай радіуси ниток решітки дорівнюють чверті

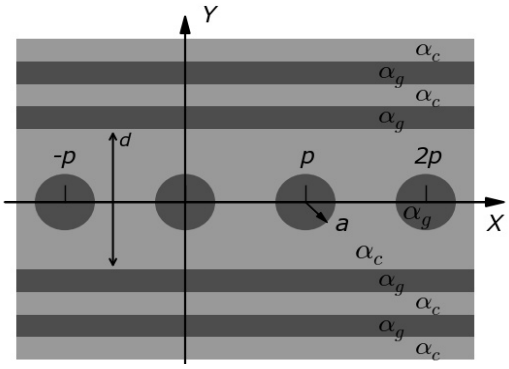


Рис.5.11 Поперечний переріз резонатора типу VCSEL з вбудованою в нього гратами з квантових ниток.

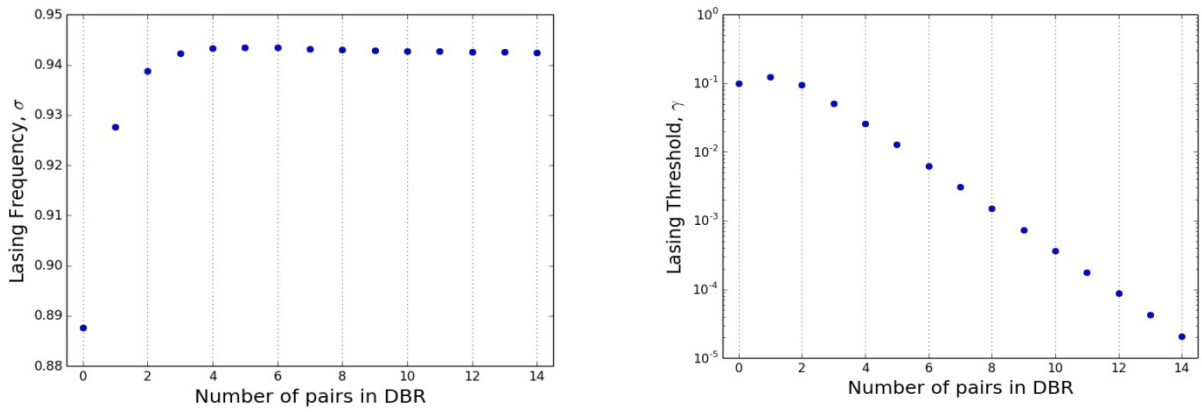


Рис.5.12 Залежності власної частоти і порога самозбудження для однієї з граткових мод для структури показаної на Рис. 5.11 від кількості пар у відбивачі Брагг $\alpha_C = 1.4$, $\alpha_G = 2.0$, $d = p = 4a$, *H*-поляризація.

періоду, а показник заломлення дорівнює $\alpha_G = 2.0$. Будемо вважати, що відбивачі Брегга складені з N пар шарів матеріалів з $\alpha_C = 1.4$ і $\alpha_G = 2.0$.

Матриця розсіювання для такої системи має такий вигляд:

$$A = B(1,\alpha_C)\left(B(\alpha_G,\alpha_C)S(d')B(\alpha_C,\alpha_G)S(d'')\right)^N B(\alpha_C,\alpha_G)S(d_1)G(\alpha_C,\alpha_G)S(d_2)\left(B(\alpha_C,\alpha_G)S(d'')B(\alpha_G,\alpha_C)S(d')\right)^N B(\alpha_C,1), \quad (5.2.1)$$

де B, S і G - це матриці побудовані за допомогою (5.2.10-13) Як і для моделі VCSEL з однорідною активною зоною (див. Розділ 2), на Рис. 5.12 можна спостерігати падіння порога випромінювання до рівня $\gamma \approx 10^{-5}$, в тому випадку, якщо число пар шарів N у відбивачі Брегга зростає з 2 до 14.

5.3 Активний діелектричний шар з періодичними циліндричної порожнини

В даному підрозділі розглядаються моди діелектричного шару в вільному просторі з періодичними круговими циліндричними порожнинами, розташовані і в центрі цього шару Рис. 5.13. Як і раніше, з початку досліджуємо задачу розсіювання плоскої нормально падаючої хвилі, а потім - лазерну задачу, причому будемо вважати що посиленням володіє матеріал з якого складається шар. Для вирішення задачі розсіювання використовуємо матрицю, побудовану таким чином,

$$A = B(1,\nu)S(d,\nu)G(\nu,1)S(d_2,\nu)B(\nu,1) \tag{5.2.1}$$

де матриці B, S і G представлені виразами (5.2.10) - (5.2.13).

На Рис. 5.14 показані рельєфи коефіцієнта відбиття на поле нормованої частоти і періоду шару. Тут можна побачити резонанси шару - вони мають вигляд діагональних пологих хребтів. Причому при великих значеннях періоду, відносний обсяг порожнин стає менше, і ці резонанси стають менш добротними. Граткові резонанси представлені у вигляді вузьких хребтів, які

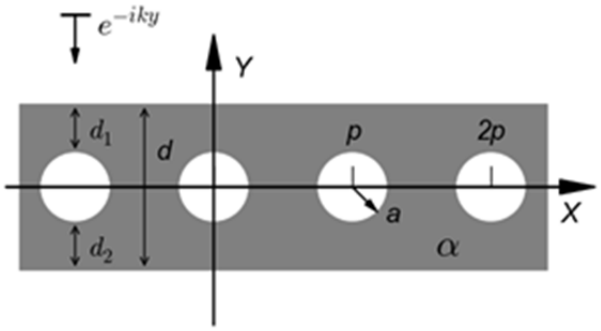
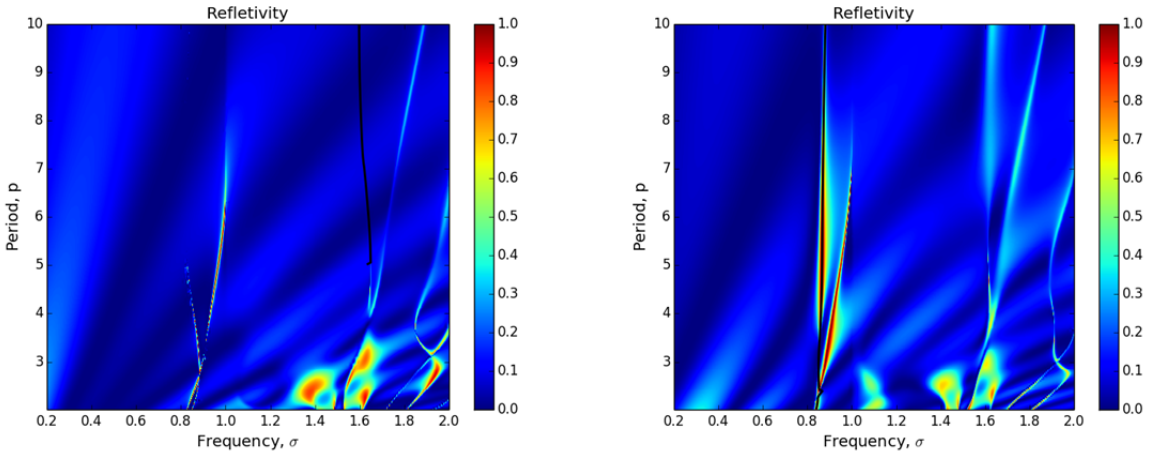


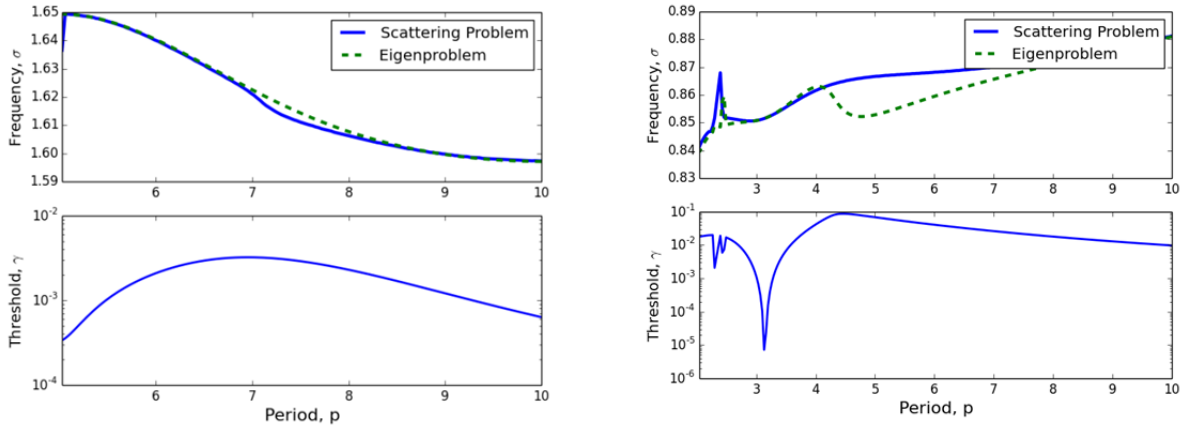
Рис. 5.13 Поперечний переріз плоского діелектричного шару з періодичними циліндричними включеннями.



(а) (б)

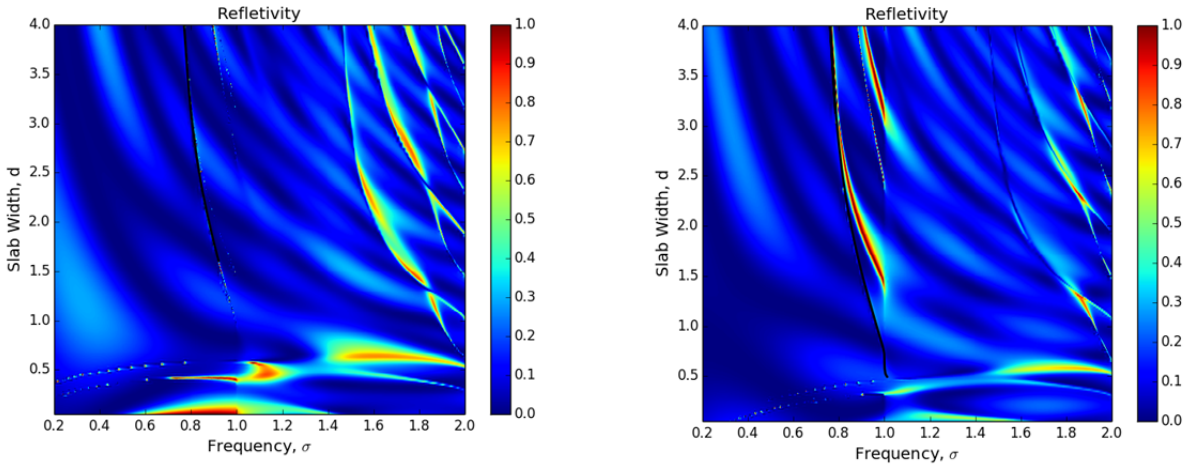
Рис.5.14 Рельєфи коефіцієнта відбиття на поле нормованої частоти і періоду структури для діелектричного шару з показником заломлення $\alpha = 1.4$ з періодичними циліндричними порожнинами, розташованими посередині шару $d_1 = d_2 = 2a$. *H*- поляризація (а) и *E*- поляризація (б).

демонструють значно більш складну поведінку, ніж для попередніх геометрій. Незважаючи на це, як і раніше, це хребти витягуються уздовж лінії $\sigma = 1$ при збільшенні періоду. Як і раніше в *H*-полярізації на граткових модах резонанси вужчі, ніж в *E*-полярізації. Для вивчення лазерної завдання ми вважаємо, що значення показника заломлення шару - комплексне число



(а) (б)

Рис.5.15 Залежності власної частоти і порога самозбудження для граткової моди від періоду структури. Геометричні і фізичні параметри точно збігаються з Рис. 5.14.*H*-поляризация (а) и *E*-поляризация (б).

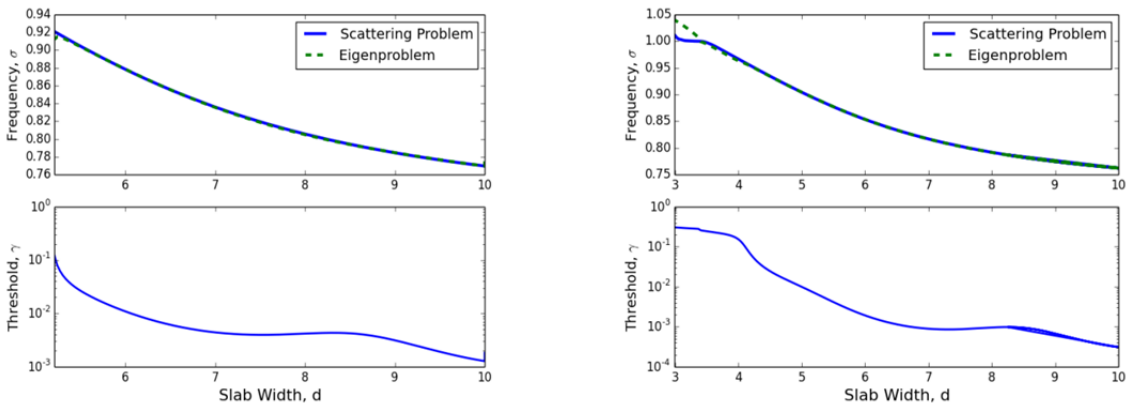


(а) (б)

Рис.5.16 Рельєфи коефіцієнта відбиття на поле нормованої частоти і товщини діелектричного шару з показником заломлення $\alpha = 1.4$ з періодичними циліндричними порожнинами розташовані посередині шару $d_1 = d_2 = 2a$. *H*- поляризація (а) и *E*- поляризація (б).

$\nu = \alpha - i\gamma$ і відшукуємо відповідні власні значення (σ, γ) як коріння детермінантного рівняння.

Рис. 5.15 представляє результати вивчення лазерної завдання для даної моделі. Тут наведено на одному графіку частоти відповідні максимуму відображення (синя лінія) і знайдені власні значення, зображені зеленим пунктиром. У порівнянні з попередніми результатами, частота резонансу в



(а) **(б)**

Рис.5.17 Залежності власної частоти і порога самозюудження для граткової моди від нормованої товщини шару. Геометричні і фізичні параметри збігаються з тими які використовувалися для Рис. 5.16. *H*-поляризація (а) и *E*-поляризація (б).

завданні розсіювання і власна частота не цілком збігаються.

Рис. 5.16 демонструє результати дослідження задачі розсіювання для діелектричного шару з періодичними циліндричними порожнинами, розташованими в центрі шару. Рельєф коефіцієнта відображення побудований на поле нормованої частоти і товщини шару. Тут резонанси на граткових модах - це вузькі і контрастні хребти. Чорними лініями позначені резонанси, на модах яких досліджувалася лазерна завдання. Рис. 5.17 показує як поводяться власні значення для даних мод при зміні товщини шару. Тут також зіставлені резонансні і власні частоти, причому в даному випадку їх збіг краще, ніж в попередньому.

5.4 Діелектричний шар з решіткою з срібних ниток

У розділі 4 були вивчені плазмонів ефекти, що виникають при розсіюванні Н-поляризованої плоскої хвилі на решітці з срібних нанониток у вільному просторі. У цьому підрозділі представлені результати розрахунків завдання розсіювання нормально падаючої плоскої хвилі на діелектричному шарі з вбудованою нескінченної решітками з кругових срібних нанониток. Для побудови такої моделі можна скористатися побудованої раніше матрицею розсіювання (5.2.1), підставивши в неї матрицю $G(\nu,\nu_{Ag})$. Для

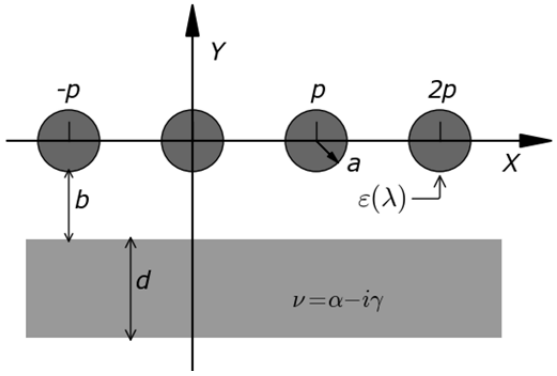
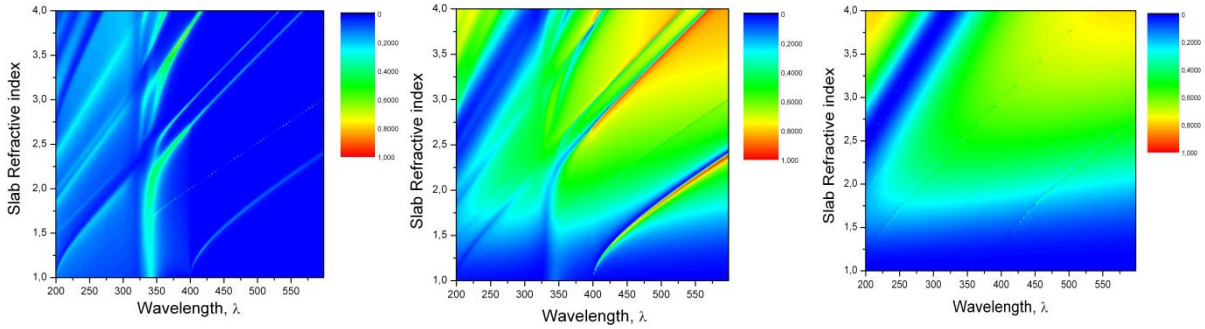


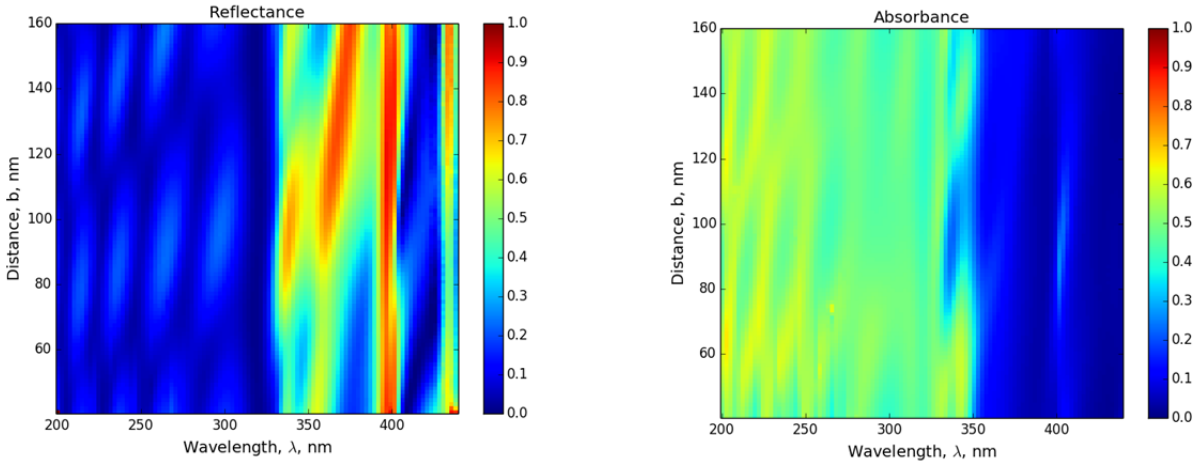
Рис. 5.18 Поперечний переріз решітки з срібних ниток над діелектричним шаром..

прикладу розглянемо діелектричний шар товщиною в $d = 300$ нм в середині якого знаходиться решітка з періодичних порожнин (див Рис. 5.13 в попередньому параграфі) з періодом $p = 300$ нм і радіусом $a = 15$ нм. На Рис. 5.19 (в) зображений рельєф відображення від такого шару в залежності від довжини хвилі і коефіцієнта заломлення шару. Якщо взяти замість порожнин Рис. 5.19 (б) всередині діелектричного шару грати зі срібних циліндрів, то тоді показник заломлення діелектрика повинен впливати на довжину хвилі плазмонного і граткових резонансів. Розглянемо рельєф коефіцієнта відбиття, що залежить від довжини хвилі і коефіцієнта заломлення шару. На ньому видно явне наслідування властивостей шару у вигляді широкого резонансу на власній моді шару. Однак також видно, що гратковий резонанс посилений гібридизацією з плазмонів ефектом і може бути близький до 1.



(а) (б) (в)

Рис 5.19 Рельєфи коефіцієнта поглинання (а) і відображення (б) плоскою нормально падаючої хвилі від діелектричного шару завтовшки d = 400 нм із зануреною в нього решіткою з срібних ниток посередені $d_1 = d_2$ з періодом p = 400 нм і радіусом ниток a = 20 нм. Рельєф коефіцієнта відбиття від такого ж шару але з періодичними порожнинами такого ж радіусами як у срібних ниток (в).



(а) (б)

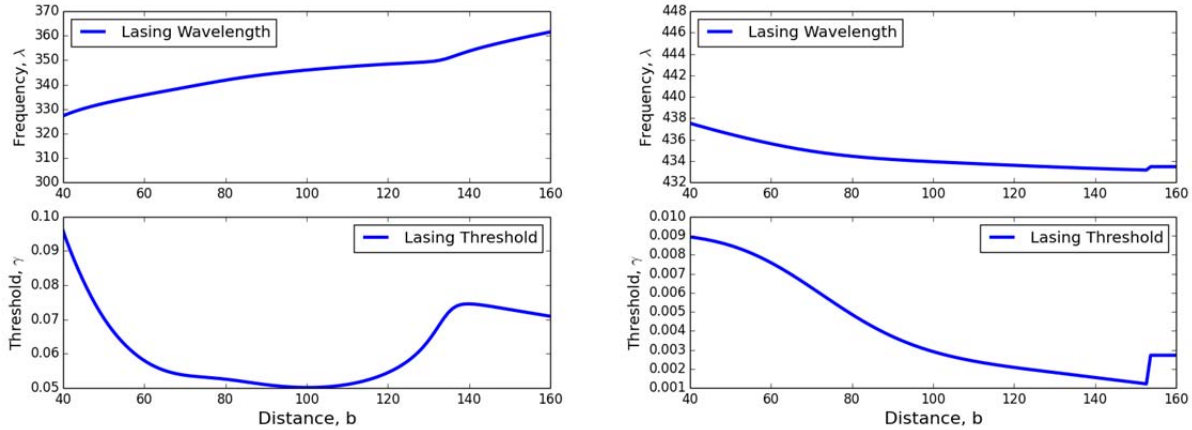
Рис.5.20 Рельєфи коефіцієнта відображення (а) і поглинання (б) плоскою нормально падаючої хвилі від решітки з срібних ниток з періодом p = 400 нм і радіусом циліндрів a = 40 нм, що знаходиться над діелектричним шаром з коефіцієнтом заломлення $\alpha = 1.4$ і шириною d = 400 нм на поле від довжини хвилі і відстані між гратами і шаром.

Для аналогічної структури, але з $d = p = 400$ нм і $a = 20$ нм, можна спостерігати схожу поведінку. Рельєфи коефіцієнта відображення підтверджують, що частота плазмонного резонансу майже не залежить від розмірів срібних нанониток.

Розглянемо тепер іншу конфігурацію, в якій решітка з срібних ниток знаходиться над діелектричним шаром, Рис.5.4.3. Нехай решітка має період $p = 400$ нм і радіус нанониток в ній $a = 40$ нм. Ця решітка знаходиться над однорідним діелектричним шаром товщиною $d = 400$ нм і з показником заломлення $\alpha = 1.4$. Тоді матриця розсіювання для такої структури матиме такий вигляд,

$$A = G(1, \nu_{Ag}) S(b,1) B(1,\nu) S(d,\nu) B(\nu,1), \qquad (5.4.1)$$

На рельєфах Рис. 5.4.4 зображена залежність коефіцієнтів відбиття і поглинання від відстані між шаром і решіткою та довжини хвилі. Так як



(а) (б)

Рис. 5.21 Власні частоти і пороги самозбудження для плазмонної (а) і граткової (б) моди в залежності від відстані між гратами і шаром. Параметри структури відповідають Рис. 5.20.

геометричні параметри решітки тут постійні, то резонанс на граткових модах вдає із себе вертикальну лінію. Як завжди, можна спостерігати плазмонний резонанс на довжині хвилі $\lambda = 348$ нм.

Розглянемо лазерну завдання, вважаючи, що матеріал діелектричного шару має посиленням, $\nu = 1.4 - i\gamma$. На Рис. 5.21 (а) показані залежності частоти і порога для плазмонів моди при мінливому відстані між решіткою і шаром. Слід зазначити, що поріг плазмонів моди має локальний мінімум при b = 100 нм. Поріг граткової моди поводиться досить несподіваним чином - він убуває з ростом відстані від решітки до активного шару, принаймні, поки ця відстань не досягає 157 нм. Мабуть, це пояснюється тим, що срібні нитки мають значне поглинання, так що при відсунення їх далі від активної зони загальні втрати знижуються.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 5

В даному розділі були розглянута ЛЗВЗ для відкритого резонатора, що складається з діелектричного шару з вбудованою в нього решітками з квантових або срібних ниток. За результатами досліджень, опублікованих в статтях [6] і працях конференцій [30, 33, 37-40, 42, 45], можна зробити наступні висновки:

1. Досліджено лазерні моди плоского шару в вільному просторі з вбудованою решітками з квантових ниток. У такій структурі добре розрізняються моди шару і решітки. Знайдено частоти і пороги самозбудження граткових мод. Їх пороги залежать від гібридизації з модами шару. Добротність граткових резонансів в *H*-поляризації вище, ніж в *E*-поляризації.

2. В діелектричному шарі з решітками з квантових ниток з показником заломлення, близьким до показника заломлення шару, граткова мода може мати вкрай низький поріг самозбудження.

3. Якщо шар з решіткою з квантових ниток поміщений між двох брегговскіх рефлекторів, то поріг самозбудження граткової моди падає зі збільшенням кількості пар шарів в рефлекторах, якщо частота цієї моди потрапляє в смугу замикання цього рефлектора.

4. Для решітки з срібних ниток, розташованої над плоским шаром, що складається з активного матеріалу, спостерігається зниження порога самозбудження граткової моди при відсунення решітки від шару.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВОКИ

У дисертаційній роботі досліджені актуальні завдання радіофізики, що складаються в розробці лінійної електродинамічної моделі, здатної описати частоти і пороги самозбудження власних електромагнітних полів в періодичних відкритих резонаторах з діелектричних, металевих і нанониток з активними зонами у вигляді квантових нанониток. В рамках цієї моделі вивчена модифікована (лазерна) завдання на власні значення для кількох важливих типів двовимірних періодичних резонаторів. Серед них - нескінченна решітка, що складається з квантових нанониток у вільному просторі або в плоскошаруватому середовищі, а також бінарна решітка, що складається з срібних і квантових нанонити. В якості допоміжних завдань, досліджувалися завдання розсіювання і поглинання плоских хвиль двох поляризацій на зазначених нескінченних решітці.

Основні наукові і практичні результати полягають у наступному:

- вперше встановлена природа так званих граткових мод періодичних відкритих резонаторів, що містять нескінченні решітки з тонких діелектричних або металевих ниток;

- вперше встановлено, що в нескінченній решітці з тонких квантових нанониток граткових лазерні моди мають наднизькі пороги самозбудження;

- вперше показано, що можна домогтися зниження матеріальних порогів самозбудження граткових мод, збільшуючи відстань між квантовими нанонитками, знижуючи їх показник заломлення, а також розміщуючи квантові нитки між розподіленими рефлекторами Брегга;

- продемонстровано, що в розсіянні і поглинанні хвиль на решітці з металевих нанониток і на бінарної решітці з діелектричних і металевих нанониток в світловому діапазоні спостерігаються резонанси на плазмонних модах і на граткових модах;

- вперше виявлено, що в бінарній решітці з квантових і металевих нанониток спільно існують плазмонні і граткові лазерні моди, причому пороги самозбудження останніх нижче порогів плазмонних мод;

- вперше встановлена на підставі рівнянь Максвелла, оптична теорема для мод періодичного відкритого резонатора з нанониток, що пов'язує поріг самозбудження моди з характеристиками поля моди;

- вперше виведена асимптотичні вирази для комплексних власних частот граткових мод решітки з круглих діелектричних нанониток і порогів самозбудження решітки з кругових квантових ниток, справедливі, якщо радіус ниток або їх контраст з навколишнім середовищем прагне до нуля.

СПИСОК ВИКОРАСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Mathematical analysis of the lasing eigenvalue problem for the optical modes in a layered dielectric cavity with a quantum well and distributed Bragg reflectors," *Optical and Quantum Electronics*, vol. 39, no 10-11, pp. 927-937, 2007.
2. V.O. Byelobrov, J. Ctyroky, T.M. Benson, A. Altintas, R. Sauleau, A.I. Nosich, "Low-threshold lasing modes of an infinite periodic chain of quantum wires," *Optics Letters*, vol. 35, no 21, pp. 3634-3636, 2010.
3. E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, T.M. Benson, J. Ctyroky, R. Sauleau, A.I. Nosich, "Optical theorem helps understand thresholds of lasing in microcavities with active regions," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. 47, no 1, pp. 20-30, 2011.
4. D.M. Natarov, V.O. Byelobrov, R. Sauleau, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Periodicity-induced effects in the scattering and absorption of light by infinite and finite gratings of circular silver nanowires," *Optics Express*, vol. 19, no 22, pp. 22176-22190, 2011.
5. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Binary grating of sub-wavelength silver and quantum wires as a photonic-plasmonic lasing platform with nanoscale elements," *IEEE J. Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 18, no 6, pp. 1839-1846, 2012.
6. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, "Extraordinary high-Q resonances in the scattering by a dielectric slab containing a grating of circular cylinders," *Int. J. Semiconductor Physics, Quantum Electronics, and Optoelectronics, ISP NASU Press, Kiev*, vol. 17, no 1, pp. 100-105, 2014.
7. V.O. Byelobrov, T.L. Zinenko, K. Kobayashi, A.I. Nosich, "Periodicity matters: grating or lattice resonances in the scattering by sparse arrays of sub-wavelength strips and wires," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 57, no 6, pp. 34-45, 2015.
8. T.L. Zinenko, V.O. Byelobrov, M. Marciniak, J. Ctyroky, A.I. Nosich, "Grating resonances on periodic arrays of sub-wavelength wires and strips: from discoveries to photonic device applications," in O. Shulika, I. Sukhoivanov (Eds.)*Contemporary Optoelectronics: Materials, Metamaterials and Device Applications, Springer Ser. Optical Sciences*, vol. 199, pp. 65-79, 2016.
9. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Dependences of lasing thresholds of a layered structure on the quantum-well width," Proc. Int. Workshop on Optical Waveguide Theory and Numerical Modeling (OWTNM-07), Copenhagen, 2007, p. 17.
10. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Lasing spectra and thresholds of the optical modes in a layered-DBR microcavity equipped with a quantum well," Proc.

Mediterranean Microwave Symposium (MMS-2007), Budapest, 2007, pp. 167-170.

11. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Dependences of lasing thresholds for a layered structure equipped with a quantum well on the mode symmetry," Abstracts Int. Conf. Days on Diffraction (DoD-07), St. Petersburg, 2007, p. 25.

12. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Thresholds of lasing as solutions of characteristic equation for a VCSEL-type layered structure," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-07), Rome, 2007, vol. 4, pp. 204-207.

13. E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, P. Sewell, T.M. Benson, J. Ctyroky, A.I. Nosich, "Understanding thresholds of microcavity lasers through overlap coefficients," Proc. Int. Workshop on Optical Waveguide Theory and Numerical Modeling (OWTNM-08), Eidhoven, 2008, p. 9.

14. A.I. Nosich, E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, P. Sewell, T.M. Benson, J. Ctyroky, "Optical theorem helps understand thresholds of lasing in open semiconductor microcavities," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-08), Athens, 2008, vol. 4, pp. 10-13.

15. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A. Altintas, A.I. Nosich, "Characteristic equations for the lasing modes of infinite periodic chain of quantum wires," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-08), Athens, 2008, vol. 4, pp. 246-249.

16. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, P. Sewell, A.I. Nosich, "Linear modelling of lasing thresholds in a VCSEL-like cavity with an active region," Proc. URSI General Assembly (URSI-GA-2008), Chicago, 2008, DP2p4.

17. A.I. Nosich, E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, T.M. Benson, P. Sewell, J. Ctyroky, "Mathematical and numerical modelling of optical microcavities with active regions," Abstracts Int. Conf. Photonics, Devices and Systems (Photonics Prague 2008), Prague, 2008, p. 58.

18. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Lasing modes of infinite periodic chain of quantum wires," Abstracts Int. Conf. Photonics, Devices and Systems (Photonics Prague 2008), Prague, 2008, p. 65.

19. A.I. Nosich, E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, P. Sewell, T. Benson, J. Ctyroky, "New aspects of the use of Optical Theorem in the analysis of microcavity lasers," Proc. Int. Conf. Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL-08), Alushta, 2008, pp. 101-103.

20. V.O. Byelobrov, P. Sewell, T. Benson, A.I. Nosich, "Numerical study of lasing modes of periodically structured active nanowires," Proc. Int. Conf. Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL-08), Alushta, 2008, pp. 94-97.

21. V.O. Byelobrov, R. Sauleau, A.I. Nosich, "Verification of lasing spectra and thresholds for layered structures equipped with quantum wells with the aid of the

optical theorem," Abstracts Int. Conf. Mediterranean Microwave Symp. 2008 (MMS-2008), Damask, 2008.

22. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Lasing spectra and thresholds of a layered dielectric cavity with a quantum well and distributed Bragg reflectors," Proc. Int. Conf. Theoretical and Computational Nanophotonics 2008 (TACONA-2008), Bad Honnef, 2008.

23. V.O. Byelobrov, P. Sewell, T. Benson, A. Altintas, A.I. Nosich,"Lasing modes of periodical chain of circular active nanowires," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-2009), Ponta Delgada, 2009, Th.P.4.

24. V.O. Byelobrov,"Lasing eigenvalue problem study for a periodic grating of active circular nanowires," Digest Int. Workshop Modern Challenges in Microwave Superconductivity, Photonics and Electronics (MSPE-2009), Kharkov, 2009, p. 44.

25. V.O. Byelobrov, T. Benson, J. Ctyroki, R. Sauleau, A.I. Nosich,"Plasmon and structure resonances in the scattering of light by a periodic chain of silver nanowires," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-2010), Munich, 2010, Tu.P.8.

26. A.I. Nosich, E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, T.M. Benson, R. Sauleau, "Effective mode volume of a natural mode of an open dielectric resonator with an active region," Proc. Int. Conf. Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL-10), Sebastopol, 2010, pp. 33-35.

27. A.I. Nosich, E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, R. Sauleau, "Poynting theorem for the natural modes of open dielectric resonators with active regions," Proc. Asia-Pacific Microwave Conf. (APMC-2010), Yokohama, 2010, pp. 857-860.

28. V.O. Byelobrov, A. Vukovic, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Reflection properties and lasing modes in the H-polarization case for an infinite chain of dielectric and silver nanowires," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-2011), Stockholm, 2011, We.B2.5.

29. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Near and far fields of high-quality resonances of an infinite grating of sub-wavelength wires," Proc. European Conf. Microwaves (EuMC-11), Manchester, 2011, pp. 858-861.

30. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Impact of hosting media on the specific resonances of periodic grating embedded in dielectric slab," Proc. Int. Workshop on Optical Waveguide Theory and Numerical Modeling (OWTNM-12), Barcelona, 2012.

31. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Plasmon resonances of an infinite grating of silver wires coated with dielectric envelopes," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-2012), Coventry, 2012, Tu.A5.6.

32. T.L. Zinenko, V.O. Byelobrov, M. Marciniak, A.I. Nosich, "Comparison of resonance optical scattering of plane waves by infinite gratings of silver cylinders and strips," Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET*12), Kharkiv, 2012, pp. 447-450.

33. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Modeling of extraordinary high-Q resonances in the scattering by periodically structured dielectric slab," Proc. European Conf. Microwave Integrated Circuits (EuMIC-12), Amsterdam, 2012, pp. 550-553.

34. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Electromagnetic characterization of a silver nanowire grating embedded into a dielectric slab," Proc. Int. Conf. Electronics and Nanotechnology (ELNANO-2013), Kiev, 2013, pp. 70-72.

35. A.I. Nosich, V.O. Byelobrov, O.V. Shapoval, D.M. Natarov, T.L. Zinenko, M. Marciniak, "Grating resonances as an alternative to plasmon resonances in nanophotonics applications," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-2013), Cartagena, 2013, We.C5.2.

36. A.I. Nosich, V.O. Byelobrov, O.V. Shapoval, D.M. Natarov, T.L. Zinenko, M. Marciniak, J. Ctyroky, "Grating resonances on periodic arrays of sub-wavelength wires and strips: historical narrative and possible applications," Proc. Int. Conf. Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL-2013), Sudak, 2013, pp. 10-13.

37. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, "Scattering of the plane wave from a periodically perforated dielectric slab," Proc. Int. Conf. Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL-2013), Sudak, 2013, pp. 43-45.

38. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, "Natural modes of an active slab microcavity with air-filled periodic inclusions," Proc. Int. Conf. Microwaves, Radar and Wireless Communications (MIKON-2014), Gdansk, 2014, pp. 442-445.

39. V.O. Byelobrov, "Electromagnetic properties of a dielectric slab with an embedded silver nanowire grating," Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET*14), Dnipropetrovsk, 2014, pp. 180-182.

40. V.O. Byelobrov, "Lasing threshold of plasmon mode of silver nanowire grating embedded in a partially active dielectric slab," Proc. Int. Workshop on Optical Wave and Waveguide Theory and Numerical Modeling (OWTNM-2015), London, 2015, p. 136.

41. A.I. Nosich, V.O. Byelobrov, T.L. Zinenko, D.M. Natarov, O.V. Shapoval, "Optical grating or lattice resonances on silver strip and wire gratings," Abstracts Int. Workshop Optical Wave and Waveguide Theory and Numerical Modeling (OWTNM-2015), London, 2015, p. 22.

42. V.O. Byelobrov, "Ultralow lasing thresholds of VCSEL-type resonators with periodically structured quantum wells," Proc. Atlantic Radio Science Conference (AT-RASC-2015), Gran Canaria, 2015.

43. A.I. Nosich, O.V. Shapoval, V.O. Byelobrov, D.M. Natarov, "New frontiers for Maxwell equations: electromagnetic modeling of lasers as open resonators with active regions," Proc. National Electromagnetic Theory Meeting Japan (EMT-2015), Miyazaki, 2015, pp. 49-56.

44. V.O. Byelobrov, "Optical properties of a dielectric slab front-loaded with a grating of plasmonic silver nanowires," Proc. Int. Conf. Electronics and Nanotechnology (ELNANO-2016), Kiev, 2013, pp. 64-66.

45. V.O. Byelobrov, "Methods of decreasing the lasing thresholds of optical resonators with periodically structured active nano wires," Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET*14), Lviv, 2016, p. 239.

46. V.O. Byelobrov, "Asymptotic approximations of lasing eigenvalues of an infinite grating of circular quantum wires in the free space," Proc. Int. Conf. Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL-2016), Odessa, 2016, pp. 262-264.

47. A.I. Nosich, M.V. Balaban, V.O. Byelobrov, D.M. Natarov, O.V. Shapoval, "Essentials and merits of the method of analytical regularization in computational optics and photonics," Proc. Int. Conf. Laser and Fiber-Optics Numerical Modeling (LFNM-2016), Odessa, 2016, pp. 77-81.

48. V.O. Byelobrov, "Lasing thresholds of plasmon and grating modes of coated silver nanowire gratings," Proc. IEEE Ukraine Conf. Electrical Computer Eng. (UKRCON-2017), Kiev, 2017.

49. Б.З. Каценеленбаум, *Высокочастотная электродинамика*. Главная Редакция Физико-Математической Литературы, Москва, 1966.

50. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*. Главная Редакция Физико-Математической Литературы, Москва, 1973.

51. Л.М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*. Издательство Наука, Москва, 1973.

52. H. Hertz, “Ueber strahlen elektrischer kraft,” Ann. Phys. Chem. Leipzig, Bd. 36, pp. 769-783, 1889.

53. R. W. Wood, “On a Remarkable Case of Uneven Distribution of Light in a Diffraction Grating Spectrum,” Proceedings of the Physical Society of London, vol. 18, issue 1, pp. 269-275, 1902.

54. Lord Rayleigh. “On the dynamical theory of gratings,” *Proc. Royal Soc. London*, A-79, pp. 399-416, 1907.

55. А.Г. Свешников, “Принцип излучения,” *Доклады АН СССР*, vol. 73, no 5, pp. 917-920, 1950.

56. В.П. Шестопалов, Ю.К Сиренко, *Динамическая теория решеток*. Наукова думка, Киев, 1989.

57. В.П. Шестопалов, Л.Н. Литвиненко, С.А. Масалов и В.Г. Сологуб, *Дифракция волн на решетках*. Изд-во Харьковского Университета, 1973.

58. В.П. Шестопалов, *Дифракционная электроника,* Изд-во Харьковского Университета, 1976.

59. V. Twersky, "On scattering of waves by the infinite grating of circular cylinders," *IRE Trans. Antennas Propagation*, vol. 10, no 3, pp. 737-765, 1962.

60. V. Twersky, "On a multiple scattering theory of the finite grating and the wood anomalies," *Journal of Applied Physics*, vol. 23, no 10, pp. 1099-1118, 1952.

61. N.A. Nicorovici, R.C. McPhedran and R. Petit. "Efficient calculation of the Green's function for electromagnetics scattering by grating," *Phisical Review E*, vol. 49, no 5, pp. 4563- 4576, 1994.

62. K. Yasumoto and K. Yoshitomi, "Efficient calculation of lattices sums for free-space periodic Green's function," *IEEE Trans. Antennas Propag.* vol. 47, no 6, pp. 1050-1055 1999.

63. C.M. Linton, "The Green's function for the two-dimensional Helmholtz equation in periodic domains", *J. Engineering Mathematics*, vol. 33, pp. 377-402, 1998.

64. A. Moroz, "Quasi-periodic Green's functions of the Helmholtz and Laplace equations," www.wave-scattering.com

65. A. Moroz, "Exponentially convergent lattice sums," *Optics Letters*, vol. 26, no 15, pp. 1119-1121, 2001.

66. O. Kavaklioglu, "On Shlömlilch series representation for the transverse electric multiple scattering by an infinite grating of insulating dielectric circular cylinders at oblique incidence," *Journal of Physics A*: *Mathematical and General*, vol. 35, pp. 2229-2248, 2002.

67. K. Yasumoto, H. Toyama, T. Kushta, "Accurate analysis of 2-D electromagnetic scattering from multilayered periodic arrays of circular cylinders using lattice sums technique", *IEEE Trans. Antennas Propagation*, vol. 52, no 10, pp. 2603-2611, 2004.

68. K. Yasumoto, T. Kushta, H. Tokoyama, "Reflection and transmition from periodic composite structure of circular cylinders " *MSMW'2001*, Kharkov, pp. 96-101, 2001

69. H. Toyama, K. Yasumoto, "Electromagnetic scattering from periodic arrays of composite circular cylinder with internal cylindrical scatterers", *Progress in Electromag. Research*, vol. 52, no 10, pp. 321-333, 2005.

70. H. Jia, K. Yasumoto. “Scatteration and absorbtion characteristics of multilayered grating embedded in a dielectric slab,” *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, vol. 26, no. 8, pp. 1111-1125, 2005.

71. V. Jandieri, K. Yasumoto and H. Toyama. “Radiation from a line source placed in two-dimensional photonic crystals,” *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, vol. 28, pp. 1161-1173, 2007.

72. W.C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, New York, Van Nostrand Reinhold, 1990.

73. X. Antoine, C. Chniti, K. Ramdani, “On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders,” *J. Comput. Phys.*, vol. 227, pp. 1754-1771, 2008.

74. X. Antoine, K. Ramdani, B. Thierry, “Etude numerique de la resolution par equations integrales de la diffraction multiple par des disques,” in Proc. Congres Français d’Acoustique, Lyon, 2010.

75. R. Gomez-Medina, M. Laroche, J.J. Saenz, “Extraordinary optical reflection from sub-wavelength cylinder arrays,” *Optics Express*, vol. 14, no 9, pp. 3730-3737, 2006.

76. M. Laroche, S. Albaladejo, R. Carminati, and J. J. Saenz, “Optical resonances in one-dimensional dielectric nano-rod arrays: field-induces fluorescence enhancement,” *Optics Letters*, vol. 32, no.18, pp. 2762-2764, 2007.

77. В.В. Никольский, Т.И. Никольская, *Электродинамика и распространение радиоволн*. Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, Москва, 1989.

78. A.I. Nosich, E.I. Smotrova, S.V. Boriskina, T.M. Benson, P. Sewell, "Trends in microdisk laser research and linear optical modelling," *Optical and Quantum Electronics*, vol. 39, no 15, pp. 1253-1272, 2007.

79. J. Faist, C. Gmachl, M. Striccoli, C. Sirtori, F. Capasso, “Quantum cascade disk lasers,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 69, no 17, pp. 2456–2458, 1996

80. E.I. Smotrova, A.I Nosich, “Mathematical analysis of the lasing eigenvalue problem for the WG modes in a 2-D circular dielectric microcavity,” *Optical and Quantum Electronics*, vol. 36, no 1-3. pp. 213-221, 2004.

81. E.I. Smotrova, A.I Nosich, T.M. Benson, P. Sewell, “Cold-cavity thresholds of microdisks with uniform and non-uniform gain: quasi-3D modeling with accurate 2D analysis,” *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 11, no 5. pp. 1135-1142, 2005.

82. Н.Н. Войтович , Б.З. Каценеленбаум , А.Н. Сивов, *Обобщенный метод собственных колебаний теории дифракции,* Наука, Москва, 1977.

83. J. Ripoll, C.M. Soukoulis, E.N. Economou, “Optimal tuning of lasing modes through collective particle resonance,” *J. Opt. Soc. Am. B,* vol. 21, no 1, pp. 141–149, 2004.

84. M. Kerker, “Resonances in electromagnetic scattering by objects with negative absorption,” *Appl. Opt.* vol. 18, no 8, pp. 1180–1189, 1979.

85. S.W. Corzine, R.S. Geels, J.W. Scott, R.-H. Yan, L.A. Coldren, “Design of Fabry-Perot surface-emitting lasers with a periodic gain structure,” *IEEE J. Quantum Electron*., vol. 25, no 6, pp. 1513-1524, 1989.

86. B. Klein, L.F. Register, K. Hess, D.G. Deppe, Q. Deng, “Self-consistent Green’s function approach to the analysis of dielectrically apertured VCSELs,” *Appl. Physics Lett.,* vol. 73, no 23, pp. 3324-3326, 1998.

87. M.J. Noble, J.P. Loehr, J.A. Lott, “Analysis of microcavity VCSEL lasing modes using a full-vector weighted index method,” *IEEE J. Quantum Electron*, vol. 34, pp. 1890–1903, 1998.

88. J. Van Campenhout, P. Bienstman, R. Baets, “Band-edge lasing in gold-clad photonic-crystal membranes,” *IEEE J. Select. Areas Commun.* vol. 23, no 7, pp.1418–1423, 2005.

89. S.-C. Chu, K. Otsuka, “Numerical study for selective excitation of Inge-Gaussian modes in end-pumped solid-state lasers,” *Opt. Express,* vol.15, no 25, pp.16506–16519, 2007.

90. C. Manolatou, F. Rana, “Subwavelength nanopatch cavities for semiconductor plasmon lasers,” *IEEE J. Quantum Electron.* vol. 44, no 5, pp. 435–447, 2008.

91. E.I. Smotrova, A.I. Nosich, T. Benson, P. Sewell, "Optical coupling of whispering-gallery modes in two identical microdisks and its effect on photonic molecule lasing,” *IEEE J. Selected Topics Quant. Electronics*, vol. 12, no 1, pp. 78-85, 2006.

92. E.I. Smotrova, A.I. Nosich, T.M. Benson, P. Sewell, "Threshold reduction in a cyclic photonic molecule laser composed of identical microdisks with whispering-gallery modes," *Optics Letters*, vol. 31, no 7, pp. 921-923, 2006.

93. E.I. Smotrova, A.I. Nosich, T.M. Benson, P. Sewell, “Ultralow lasing thresholds of the pi-type supermodes in cyclic photonic molecules composed of sub-micron disks with monopole and dipole modes,” *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 18, no 19, pp. 1993-1995, 2006.

94. H. Kogelnik and C. V. Shank, "Coupled-wave theory of distributed feedback lasers," *J. Appl. Physics*, vol. 43, pp. 2327-2337, 1972.

95. W. Streifer, D.R. Scifres, and R.D. Burnham, "Coupled wave analysis of DFB and DBR lasers," *IEEE J. Quant. Electronics*, vol. 13, no 4, pp. 134-141, 1977.

96. Y. Luo, Y. Nakano, K. Tada, T. Inoue, H. Hosomatsu, and H. Iwaoka, “Purely gain-coupled distributed feedback semiconductor lasers,” Appl. Phys. Lett., vol. 56, no. 17, pp. 1620–1622, 1990.

97. S. L. McCall, A. F.J. Levi, R. E. Slusher, S. J. Pearson, and R. A. Logan, "Whispering-gallery mode microdisk lasers," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 60, no 3, pp. 289-292, 1992.

98. T. Harayama and S. Shinohara, "Two-dimensional microcavity lasers," *Laser Photon. Rev.*, vol. 5, no 2, pp. 247-271, 2011.

99. L. He, S. K. Ozdemir and L. Yang, "Whispering gallery microcavity lasers." *Laser Photon. Rev.*, vol. 7, no 1, 60-82, 2013.

100. E. I. Smotrova and A. I. Nosich, "Optical coupling of an active microdisk to a passive one: effect on the lasing thresholds of the whispering-gallery supermodes," *Opt. Lett.*, vol. 38, no 12, pp. 2059-2061, 2013.

101. Y. Zhang, X. Zhang, K. H. Li, Y. F. Cheung, C. Feng, and H. W. Cho, "Advances in III-nitride semiconductor microdisk lasers," *Phys. Status Solidi A*, vol. 212, no 5, pp. 960-973, 2015.

102. S. Yang, Y. Wang, and H. Sun, "Advances and prospects for whispering gallery mode microcavities," *Adv. Optical Mater.*, vol. 3, pp. 1136-1162, 2015.

103. F. van Beijnum, P. J. van Veldhoven, E. J. Geluk, M. J. A. de Dood, G. W. ’t Hooft, and M. P. van Exter, ”Surface plasmon lasing observed in metal hole arrays.,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, pp. 206802, 2013.

104. W. Zhou, M. Dridi, J. Y. Suh, C. H. Kim, D. T. Co, M. R. Wasielewski, G. C. Schatz and T. W. Odom, “Lasing action in strongly coupled plasmonic nanocavity arrays,” *Nature Nanotechnology*, vol. 8, pp. 506–511, 2013.

105. C. Zhang, Y. Lu, Y. Ni, M. Li, L. Mao, C. Liu, D. Zhang, H. Ming, and P. Wang, “Plasmonic lasing of nanocavity embedding in metallic nanoantenna array,” *Nano Lett.*, vol. 15, pp. 1382–1387, 2015.

106. T.-Y. Kao, J.L. Reno, and Qing Hu, "Phase-locked laser arrays through global antenna mutual coupling," *Nature Photonics*, vol. 10, pp. 541–546, 2016.

107. Y. Hadad, A. H. Schokker, F. van Riggelen, A. Alu, and A. F. Koenderink, "Plasmon particle array lasers," in S. I. Bozhevolnyi, L. Martin-Moreno, F. Garcia-Vidal (Rds.), *Quantum Plasmonics*, Springer Series in Solid-State Sciences, vol. 185, pp 165-190, 2016.

108. L. Xu, D. Chen, C. A. Curwen, M. Memarian, J. L. Reno, T. Itoh, and B. S. Williams, "Metasurface quantum-cascade laser with electrically switchable polarization," *Optica*, vol. 4, no 4, pp. 468-475, 2017.

109. R. Michalzik, “VCSELs Fundamentals, Technology and Application of Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers,” Springer, Ulm, Germany, 2013.

110. S.W. Corzine, R.S. Geels, J.W. Scott, R.-H. Yan, L.A. Coldren, "Design of Fabry-Perot surface-emitting lasers with a periodic gain structure," *IEEE J. Quantum Electron*., vol. 25, no 6, pp. 1513-1524, 1989.

111. B. Klein, L.F. Register, K. Hess, D.G. Deppe, Q. Deng, "Self-consistent Green's function approach to the analysis of dielectrically apertured VCSELs," *Appl. Physics Lett.,* vol. 73, no 23, pp. 3324-3326, 1998.

112. M.J. Noble, J.P. Loehr, J.A. Lott, "Analysis of microcavity VCSEL lasing modes using a full-vector weighted index method," *IEEE J. Quantum Electron*, vol. 34, pp. 1890–1903, 1998.

113. J. Van Campenhout, P. Bienstman, R. Baets, "Band-edge lasing in gold-clad photonic-crystal membranes," *IEEE J. Select. Areas Commun.* vol. 23, no 7, pp.1418–1423, 2005.

114. S.-C. Chu, K. Otsuka, "Numerical study for selective excitation of Inge-Gaussian modes in end-pumped solid-state lasers," *Opt. Express,* vol.15, no 25, pp.16506–16519, 2007.

115. C. Manolatou, F. Rana, "Subwavelength nanopatch cavities for semiconductor plasmon lasers," *IEEE J. Quantum Electron.* vol. 44, no 5, pp. 435–447, 2008.

116. N. Morita, N. Kumagai, J.R. Mautz, *Integral Equations Methods for Electromagnetics,* Boston, Artech House, 1990.

117. F. Yu. *Analysis and Design of Vertical Cavity Surface Emitting Lasers*, John Wiley & Sons, 2003.

118. G. M. Yang, M.H. McDougal, H. Zhao and P.H. Dapkus. "Microcavity effects on the spontaneous emission from InGaAdGaAs quantum wells," *J. Appl. Phys.*, vol. 78, no 6, pp. 3605-3609, 1995.

119. I.-S. Chung, Y.-T. Lee, J.-E. Kim and H.Y. Park, "Effect of outermost layers on resonant cavity enhanced devices," *J. Appl. Phys.*, vol. 96, no 5, pp. 2423-2427, 2004.

120. J. Piprek. *Optoelectronic Devices*, Springer-Verlag, 2005.

121. X. H. Zhang, S. J. Chua, W. Liu, L. S. Wang, A. M. Yong and S. Y. Chou. "Crack-free fully epitaxial nitride microcavity with AlGaN/GaN distributed Bragg reflectors and InGaN/GaN quantum wells," *Appl. Phys. Lett.* vol. 88, pp. 191-111, 2006.

122. B.G. Kim, et al. "Comparison between the matrix method and the coupled-wave method in the analysis of Bragg reflector structures," *J. Opt. Soc. Am*., vol. 9, no 132, 1992.

123. W. Corzine, et al.: "A tanh substitution technique for the analysis of abrupt and graded interface multilayer dielectric stacks," *IEEE J. Quantum Electron*, vol. 27, 2086, 1991.

124. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения Математической Физики,* Изд-во Наука, Москва, 1966.
125. M. Abromovitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions,* US Department of Commerce, 1972
126. https://en.wikipedia.org/wiki/Domain_coloring
127. R.A. Horn, *Matrix Analysis*, 2nd Edition, Cambridge, 2013
128. M. A. Noginov, G. Zhu, A. M. Belgrave, R. Bakker, V. M. Shalaev, E. E. Narimanov, S. Stout, E. Herz, T. Su teewong, and U. Wiesner, "Demonstration of a spaser-based nanolaser," *Nature*, vol. 460, pp. 1110–1112, 2009.
129. J. P. Kottman and O. J. F. Martin, "Plasmon resonances of silver nanowires with a nonregular cross-section," *Physical Review B,* vol. 64, no. 23, pp. 235402-235410, 2001.
130. J. P. Kottman, O. J. F. Martin, "Plasmon resonant coupling in metallic nanowires," Optics Express, vol. 8, pp. 655–663, 2001.
131. V. Giannini, J. A. Sanchez-Gil, "Calculations of light scattering from isolated and interacting metallic nanowires of arbitrary cross section by means of Green's theorem surface integral equations in parametric form," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 24, pp. 2822–2830, 2007.
132. T. Søndergaard, S. J. Bozhevolnyi, "Strip and gap plasmon polariton optical resonators," *Phys. Stat. Sol. (b)*, vol. 245, pp. 9-19, 2008.
133. F.J.G. Garcia de Abajo, "Colloquium: Light scattering by particle and hole arrays," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 79, no. 4, pp. 1267-1289, 2007.
134. S. Zou, N. Janel, G. C. Schatz, "Silver nanoparticle array structures that produce remarkably narrow plasmon lineshapes," *J. Chem. Phys.*, vol. 120, pp.10871-10875, 2004.
135. S. Zou, G. C. Schatz, "Narrow plasmonic/photonic extinction and scattering lineshapes for one and two-dimensional silver nanoparticle arrays," *J. Chem. Phys.,* vol. 121, pp.12606-7, 2004.
136. S. Zou, G. C. Schatz, "Silver nanoparticle array structures that produce giant enhancements in electromagnetic fields," *Chem. Phys. Lett.*, vol. 403, pp. 62-67, 2005.
137. E. M. Hicks, S. Zou, G. C. Schatz, K. G. Spears, R. P. Van Duyne, L. Gunnarsson, T. Rindzevicius, B. Kasemo, and M. Kall, "Controlling plasmon line shapes through diffractive coupling in linear arrays of cylindrical nanoparticles fabricated by electron beam lithography," *Nano Lett.*, vol. 5, pp. 1065-1070, 2005.
138. N. Felidj, G. Laurent, J. Aubard, G. Levi, A. Hohenau, J. R. Krenn, and F. R. Aussenegg, "Grating-induced plasmon mode in gold nanoparticle arrays," *J. Chem. Phys.*, vol. 123, pp.221103-221105, 2005.

139. V. G. Kravets, F. Schedin, and A. N. Grigorenko, "Extremely narrow plasmon resonances based on diffraction coupling of localized plasmons in arrays of metallic nanoparticles," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, pp. 087403-087404, 2008.

140. B. Auguie, W. L. Barnes, "Collective resonances in gold nanoparticle arrays," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, pp. 143902-143904, 2008.

141. S. V. Boriskina, L. Dal Negro, "Multiple-wavelength plasmonic nanoantennas," *Opt. lett.*, vol. 35, pp. 538-540, 2010.

142. P.B. Johnson, R.W. Christy, "Optical constants of the noble metals," *Phys. Rev.*, vol. 6, pp. 4370-4379, 1972.

143. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.interpolate.InterpolatedUnivariateSpline.html

Додаток А

Список публікацій за темою дисертації

1. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Mathematical analysis of the lasing eigenvalue problem for the optical modes in a layered dielectric cavity with a quantum well and distributed Bragg reflectors," *Optical and Quantum Electronics*, vol. 39, no 10-11, pp. 927-937, 2007.
2. V.O. Byelobrov, J. Ctyroky, T.M. Benson, A. Altintas, R. Sauleau, A.I. Nosich, "Low-threshold lasing modes of an infinite periodic chain of quantum wires," *Optics Letters*, vol. 35, no 21, pp. 3634-3636, 2010.
3. E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, T.M. Benson, J. Ctyroky, R. Sauleau, A.I. Nosich, "Optical theorem helps understand thresholds of lasing in microcavities with active regions," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. 47, no 1, pp. 20-30, 2011.
4. D.M. Natarov, V.O. Byelobrov, R. Sauleau, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Periodicity-induced effects in the scattering and absorption of light by infinite and finite gratings of circular silver nanowires," *Optics Express*, vol. 19, no 22, pp. 22176-22190, 2011.
5. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Binary grating of sub-wavelength silver and quantum wires as a photonic-plasmonic lasing platform with nanoscale elements," *IEEE J. Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 18, no 6, pp. 1839-1846, 2012.
6. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, "Extraordinary high-Q resonances in the scattering by a dielectric slab containing a grating of circular cylinders," *Int. J. Semiconductor Physics, Quantum Electronics, and Optoelectronics, ISP NASU Press, Kiev*, vol. 17, no 1, pp. 100-105, 2014.
7. V.O. Byelobrov, T.L. Zinenko, K. Kobayashi, A.I. Nosich, "Periodicity matters: grating or lattice resonances in the scattering by sparse arrays of sub-wavelength strips and wires," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 57, no 6, pp. 34-45, 2015.
8. T.L. Zinenko, V.O. Byelobrov, M. Marciniak, J. Ctyroky, A.I. Nosich, "Grating resonances on periodic arrays of sub-wavelength wires and strips: from discoveries to photonic device applications," in O. Shulika, I. Sukhoivanov (Eds.)*Contemporary Optoelectronics: Materials, Metamaterials and Device Applications, Springer Ser. Optical Sciences*, vol. 199, pp. 65-79, 2016.
9. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Dependences of lasing thresholds of a layered structure on the quantum-well width," Proc. Int. Workshop on Optical Waveguide Theory and Numerical Modeling (OWTNM-07), Copenhagen, 2007, p. 17.
10. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Lasing spectra and thresholds of the optical modes in a layered-DBR microcavity equipped with a quantum well," Proc. Mediterranean Microwave Symposium (MMS-2007), Budapest, 2007, pp. 167-170.
11. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Dependences of lasing thresholds for a layered structure equipped with a quantum well on the mode symmetry," Abstracts Int. Conf. Days on Diffraction (DoD-07), St. Petersburg, 2007, p. 25.

12. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Thresholds of lasing as solutions of characteristic equation for a VCSEL-type layered structure," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-07), Rome, 2007, vol. 4, pp. 204-207.
13. E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, P. Sewell, T.M. Benson, J. Ctyroky, A.I. Nosich, "Understanding thresholds of microcavity lasers through overlap coefficients," Proc. Int. Workshop on Optical Waveguide Theory and Numerical Modeling (OWTNM-08), Eidhoven, 2008, p. 9.
14. A.I. Nosich, E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, P. Sewell, T.M. Benson, J. Ctyroky, "Optical theorem helps understand thresholds of lasing in open semiconductor microcavities," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-08), Athens, 2008, vol. 4, pp. 10-13.
15. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A. Altintas, A.I. Nosich, "Characteristic equations for the lasing modes of infinite periodic chain of quantum wires," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-08), Athens, 2008, vol. 4, pp. 246-249.
16. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, P. Sewell, A.I. Nosich, "Linear modelling of lasing thresholds in a VCSEL-like cavity with an active region," Proc. URSI General Assembly (URSI-GA-2008), Chicago, 2008, DP2p4.
17. A.I. Nosich, E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, T.M. Benson, P. Sewell, J. Ctyroky, "Mathematical and numerical modelling of optical microcavities with active regions," Abstracts Int. Conf. Photonics, Devices and Systems (Photonics Prague 2008), Prague, 2008, p. 58.
18. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Lasing modes of infinite periodic chain of quantum wires," Abstracts Int. Conf. Photonics, Devices and Systems (Photonics Prague 2008), Prague, 2008, p. 65.
19. A.I. Nosich, E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, P. Sewell, T. Benson, J. Ctyroky, "New aspects of the use of Optical Theorem in the analysis of microcavity lasers," Proc. Int. Conf. Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL-08), Alushta, 2008, pp. 101-103.
20. V.O. Byelobrov, P. Sewell, T. Benson, A.I. Nosich, "Numerical study of lasing modes of periodically structured active nanowires," Proc. Int. Conf. Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL-08), Alushta, 2008, pp. 94-97.
21. V.O. Byelobrov, R. Sauleau, A.I. Nosich, "Verification of lasing spectra and thresholds for layered structures equipped with quantum wells with the aid of the optical theorem," Abstracts Int. Conf. Mediterranean Microwave Symp. 2008 (MMS-2008), Damask, 2008.
22. V.O. Byelobrov, A.I. Nosich, "Lasing spectra and thresholds of a layered dielectric cavity with a quantum well and distributed Bragg reflectors," Proc. Int. Conf. Theoretical and Computational Nanophotonics 2008 (TACONA-2008), Bad Honnef, 2008.
23. V.O. Byelobrov, P. Sewell, T. Benson, A. Altintas, A.I. Nosich,"Lasing modes of periodical chain of circular active nanowires," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-2009), Ponta Delgada, 2009, Th.P.4.
24. V.O. Byelobrov,"Lasing eigenvalue problem study for a periodic grating of active circular nanowires," Digest Int. Workshop Modern Challenges in Microwave Superconductivity, Photonics and Electronics (MSPE-2009), Kharkov, 2009, p. 44.

25. V.O. Byelobrov, T. Benson, J. Ctyroki, R. Sauleau, A.I. Nosich,"Plasmon and structure resonances in the scattering of light by a periodic chain of silver nanowires," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-2010), Munich, 2010, Tu.P.8.
26. A.I. Nosich, E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, T.M. Benson, R. Sauleau, "Effective mode volume of a natural mode of an open dielectric resonator with an active region," Proc. Int. Conf. Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL-10), Sebastopol, 2010, pp. 33-35.
27. A.I. Nosich, E.I. Smotrova, V.O. Byelobrov, R. Sauleau, "Poynting theorem for the natural modes of open dielectric resonators with active regions," Proc. Asia-Pacific Microwave Conf. (APMC-2010), Yokohama, 2010, pp. 857-860.
28. V.O. Byelobrov, A. Vukovic, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Reflection properties and lasing modes in the H-polarization case for an infinite chain of dielectric and silver nanowires," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-2011), Stockholm, 2011, We.B2.5.
29. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Near and far fields of high-quality resonances of an infinite grating of sub-wavelength wires," Proc. European Conf. Microwaves (EuMC-11), Manchester, 2011, pp. 858-861.
30. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Impact of hosting media on the specific resonances of periodic grating embedded in dielectric slab," Proc. Int. Workshop on Optical Waveguide Theory and Numerical Modeling (OWTNM-12), Barcelona, 2012.
31. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Plasmon resonances of an infinite grating of silver wires coated with dielectric envelopes," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-2012), Coventry, 2012, Tu.A5.6.
32. T.L. Zinenko, V.O. Byelobrov, M. Marciniak, A.I. Nosich, "Comparison of resonance optical scattering of plane waves by infinite gratings of silver cylinders and strips," Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET*12), Kharkiv, 2012, pp. 447-450.
33. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Modeling of extraordinary high-Q resonances in the scattering by periodically structured dielectric slab," Proc. European Conf. Microwave Integrated Circuits (EuMIC-12), Amsterdam, 2012, pp. 550-553.
34. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, A.I. Nosich, "Electromagnetic characterization of a silver nanowire grating embedded into a dielectric slab," Proc. Int. Conf. Electronics and Nanotechnology (ELNANO-2013), Kiev, 2013, pp. 70-72.
35. A.I. Nosich, V.O. Byelobrov, O.V. Shapoval, D.M. Natarov, T.L. Zinenko, M. Marciniak, "Grating resonances as an alternative to plasmon resonances in nanophotonics applications," Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks (ICTON-2013), Cartagena, 2013, We.C5.2.
36. A.I. Nosich, V.O. Byelobrov, O.V. Shapoval, D.M. Natarov, T.L. Zinenko, M. Marciniak, J. Ctyroky, "Grating resonances on periodic arrays of sub-wavelength wires and strips: historical narrative and possible applications," Proc. Int. Conf. Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL-2013), Sudak, 2013, pp. 10-13.

37. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, "Scattering of the plane wave from a periodically perforated dielectric slab," Proc. Int. Conf. Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL-2013), Sudak, 2013, pp. 43-45.
38. V.O. Byelobrov, T.M. Benson, "Natural modes of an active slab microcavity with air-filled periodic inclusions," Proc. Int. Conf. Microwaves, Radar and Wireless Communications (MIKON-2014), Gdansk, 2014, pp. 442-445.
39. V.O. Byelobrov, "Electromagnetic properties of a dielectric slab with an embedded silver nanowire grating," Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET*14), Dnipropetrovsk, 2014, pp. 180-182.
40. V.O. Byelobrov, "Lasing threshold of plasmon mode of silver nanowire grating embedded in a partially active dielectric slab," Proc. Int. Workshop on Optical Wave and Waveguide Theory and Numerical Modeling (OWTNM-2015), London, 2015, p. 136.
41. A.I. Nosich, V.O. Byelobrov, T.L. Zinenko, D.M. Natarov, O.V. Shapoval, "Optical grating or lattice resonances on silver strip and wire gratings," Abstracts Int. Workshop Optical Wave and Waveguide Theory and Numerical Modeling (OWTNM-2015), London, 2015, p. 22.
42. V.O. Byelobrov, "Ultralow lasing thresholds of VCSEL-type resonators with periodically structured quantum wells," Proc. Atlantic Radio Science Conference (AT-RASC-2015), Gran Canaria, 2015.
43. A.I. Nosich, O.V. Shapoval, V.O. Byelobrov, D.M. Natarov, "New frontiers for Maxwell equations: electromagnetic modeling of lasers as open resonators with active regions," Proc. National Electromagnetic Theory Meeting Japan (EMT-2015), Miyazaki, 2015, pp. 49-56.
44. V.O. Byelobrov, "Optical properties of a dielectric slab front-loaded with a grating of plasmonic silver nanowires," Proc. Int. Conf. Electronics and Nanotechnology (ELNANO-2016), Kiev, 2013, pp. 64-66.
45. V.O. Byelobrov, "Methods of decreasing the lasing thresholds of optical resonators with periodically structured active nano wires," Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET*14), Lviv, 2016, p. 239.
46. V.O. Byelobrov, "Asymptotic approximations of lasing eigenvalues of an infinite grating of circular quantum wires in the free space," Proc. Int. Conf. Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL-2016), Odessa, 2016, pp. 262-264.
47. A.I. Nosich, M.V. Balaban, V.O. Byelobrov, D.M. Natarov, O.V. Shapoval, "Essentials and merits of the method of analytical regularization in computational optics and photonics," Proc. Int. Conf. Laser and Fiber-Optics Numerical Modeling (LFNM-2016), Odessa, 2016, pp. 77-81.
48. V.O. Byelobrov, "Lasing thresholds of plasmon and grating modes of coated silver nanowire gratings," Proc. IEEE Ukraine Conf. Electrical Computer Eng. (UKRCON-2017), Kiev, 2017.